



Etude des états liés et de diffusion par la théorie quantique des champs sur le cône de lumière

Damian Oropeza Rodriguez

► To cite this version:

Damian Oropeza Rodriguez. Etude des états liés et de diffusion par la théorie quantique des champs sur le cône de lumière. Physique mathématique [math-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00007808

HAL Id: tel-00007808

<https://theses.hal.science/tel-00007808>

Submitted on 17 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I
École Doctorale de Physique

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences de l'Université Joseph Fourier
Spécialité : Physique Subatomique

par

Damián Oropeza Rodríguez

titre :

Étude des états liés et de diffusion par la théorie quantique des champs sur le cône de lumière

Thèse présentée et soutenue publiquement le 26 novembre 2004
devant le jury composé par :

M. Michael BEYER	Rapporteur
M. François BRUT	Président du jury
M. Jaume CARBONELL	Co-directeur de thèse
M. Vladimir KARMANOV	Co-directeur de thèse
M. Jean-François MATHIOT	Rapporteur

Thèse préparée au
Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie
53 Av. des Martyrs
38026 Grenoble Cedex

Résumé :

Cette thèse porte sur le calcul des états liés et de diffusion de systèmes à deux corps dans une formulation explicitement covariante de la dynamique sur le front de lumière. Nous traitons dans ce cadre deux particules scalaires en interaction à l'approximation «ladder» (modèle de Wick-Cutkosky massif). Les états liés sont calculés (onde S et P) par une décomposition angulaire du potentiel. Nous montrons que la restriction de cette décomposition à sa première composante suffit pour décrire correctement le système, ce qui revient à approximer le potentiel par sa moyenne sur toutes les directions du front de lumière. Ce résultat facilite le traitement des états de diffusion. Nous calculons donc des déphasages élastiques (onde S et P). Or notre potentiel relativiste prend en compte l'ouverture d'un canal inélastique au-delà du seuil de création. Nous calculons donc des déphasages correspondant à l'émission d'un boson, qui violent cependant l'unitarité de la matrice S. La prise en compte la self-énergie permet de résoudre ce problème comme nous montrons par un calcul perturbatif. L'ajout de la self-énergie permet d'obtenir des déphasages inélastique respectant l'unitarité de S. Nous montrons aussi que la self-énergie modifie considérablement les conditions d'existence d'états liés. Nous considérons aussi le cas des deux fermions en interaction par un échange scalaire ou pseudo-scalaire (état $J^\pi = 0^+$). Les états liés sont traités par une décomposition angulaire, mais la propriété de moyenne n'apparaît pas pour le couplage pseudo-scalaire. Elle apparaît pour le couplage scalaire, ce qui nous permet de calculer des déphasages élastiques et inélastiques à l'approximation *ladder*.

Mots clefs : Dynamique du front/cône de lumière, états liés, diffusion, déphasages élastiques et inélastiques, self-énergie, modèle de Wick-Cutkosky, fermions.

Abstract :

This thesis concerns the two-body scattering and bound states in an explicitly covariant formulation of the light-front dynamics. We consider, in this framework, two scalar particles in interaction at the "ladder" approximation (massive Wick-Cutkosky model). S and P-waves bound states are calculated by an angular decomposition of the potential. We show that the first term of the decomposition gives already a very good description of the system, what is equivalent to take an averaged potential over the light-front directions. This results simplifies the treatment of the scattering states. We obtain the elastic phase shifts (S and P waves). Yet our relativistic potential take into account the first inelastic threshold, what corresponds to the one boson emission. These phase shifts do not respects the S-matrix unitarity. We show by a perturbative calculation that the addition of self-energy contributions permits to solve this problem. Adding this term, allows to obtain an inelastic phase-shift respecting S-matrix unitarity. We show also that the self-energy contribution strongly modifies the conditions of existence of a bound state. We consider also two fermions interacting by a scalar or pseudoscalar exchange ($J^\pi = 0^+$ state). The bound states are calculated by the angular decomposition method, that works well here but fails in the pseudoscalar coupling. The average method is finally used to calculate the scattering states in the ladder approximation fo the scalar coupling.

Keywords : Explicitly Covariant Light-front dynamics, bound states, scattering, elastic and inelastic phase shift, self-energy, Wick-Cutkosky model, fermions.

Cette thèse est disponible en ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr>

A Maritza

Remerciements

J'exprime ma plus grande reconnaissance à M. Beyer, F. Brut, J. Carbonell, V. Karmanov et J.-F. Mathiot pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie de mon jury de thèse et d'évaluer mon travail. Je remercie particulièrement mes rapporteurs Michael Beyer et Jean-François Mathiot pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de lire mon manuscrit. Je remercie également le professeur François Brut, dont les enseignements et les précieux conseils ont été pour beaucoup dans mon orientation vers la physique théorique après ma maîtrise. Sa présence dans ce jury me réjouit.

Je souhaite exprimer ma plus grande gratitude à mes co-directeurs de thèse Jaume Carbonell et Vladimir Karmanov, sans lesquels cette thèse n'aurait jamais pu aboutir. Tous les deux m'ont montré, par leur exemple, toute la rigueur et en même temps toute la créativité qu'un travail de recherche signifie et exige, ainsi que le plaisir qu'il peut apporter. Pendant ses séjours réguliers au LPSC ou bien à distance, Vladimir Karmanov m'a toujours offert de son temps pour m'expliquer avec patience, pédagogie et finesse intellectuelle des points de la théorie qui m'auraient semblé bien obscurs sans son aide, pour m'ouvrir l'esprit à de vastes horizons de recherche et pour m'encourager dans les moments difficiles. Jaume Carbonell, pour sa part, a toujours su être disponible avec sa sympathie, son sens physique inégalable et la rigueur de son raisonnement. Il a toujours été présent à mes côtés, dans les bons et mauvais moments, et son appui, sa solidarité et ses justes critiques m'ont été d'une aide précieuse non seulement du point de vue professionnel mais aussi du point de vue humain. Merci infiniment à tous les deux.

Un grand merci à Mariane Mangin-Brinet, qui a fait sa thèse avec Jaume sur la LFD, dont les résultats ont été la matière première de mon travail et dont la thèse m'a permis de comprendre l'essentiel du formalisme. Sa dernière année de thèse a coïncidé avec ma première année. À ce moment et bien après, elle a toujours été très disponible, répondant avec pertinence, gentillesse et grande patience à toutes mes questions.

Je remercie les membres du groupe de Physique Théorique du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie de m'avoir accueilli parmi eux et soutenu pendant ces années de thèse. Je remercie les autres membres du laboratoire pour leur accueil et leur appui, en particulier les membres du service informatique qui ont toujours su résoudre avec grande adresse mes conflits avec les machines du laboratoire ou d'ailleurs. Je remercie également les responsables de l'IDRIS, le centre de calcul du CNRS, pour mettre à ma disposition des capacités de calcul exceptionnelles.

Je remercie l'ensemble des thésards et anciens thésards du laboratoire, particulièrement Rimas Lazauskas et Rémy Duperray avec lesquels j'ai partagé un bureau pendant ma première année de thèse, mes repas à midi et des moments très agréables au laboratoire ou ailleurs. Merci Rimas pour ton aide sur les problèmes informatiques, en particulier sur le calcul parallèle, ainsi que la technique du lancer de fléchettes. Merci aussi à Anne-Marie,

Fabien et Marciano, ainsi qu'à Feliciano, arrivé en post-doc plus récemment.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui, en dehors du laboratoire, m'ont aidé durant ces années. Tout d'abord, grand merci à Pauline et Blandine pour leurs précieuses corrections, grâce auxquelles le niveau de français du manuscrit s'est amélioré nettement par rapport aux premières versions. Merci aussi à Clément et à Jean-Phillipe pour leurs corrections et remarques plus scientifiques. J'exprime aussi ma gratitude à ceux avec qui j'ai vécu ces quatre dernières années, mes colocataires : Julien, inventeur et poète, Aurélien, grand pourfendeur de pistaches et fabricant d'univers, José Manuel, mon frère, magicien dans les mondes imaginaires, Clemens Kuleyman, maître danseur et grimpeur d'impossibles, Émilie-chan, étoile venue du levant pour éclairer l'appartement quelques mois, Christo, artiste et digne héritier des dieux Olympiens, don Clemente, prophète des coups d'état et conquérant de mon salon, monsieur Hypattané, grand et royal éducateur et musicien hors pair, Blandine, intrépide exploratrice de contrées de rêve, ainsi qu'à Nawal, Fanny et Marco, mes très sympathiques voisins qui ont rendu ce séjour à Grenoble fort agréable. Une pensée aussi pour tous ceux qui sont passés offrir des hécatombes à Athéna ou à Dyonisos autour d'une table, partager un peu de musique ou danser un petit tango. À vous tous, merci.

Je voudrais enfin remercier mes parents, Jackeline et Alexis, qui depuis toujours ont été un soutien sans faille à toutes mes entreprises, envies et folies, et ce dans n'importe quel contexte et circonstance. *Gracias por el apoyo y la confianza que siempre me han dado.*

Table des matières

Remerciements.	7
Table des Matières.	i
Introduction.	1
1 Bases du formalisme de la mécanique quantique sur le front de lumière	5
1.1 Formes de dynamiques hamiltoniennes	6
1.2 Construction des générateurs d'un groupe.	8
1.2.1 Théorème de Noether	8
1.2.2 Lien entre les charges et les générateurs d'un groupe.	10
1.3 Générateurs du groupe de Poincaré.	11
1.3.1 Dans la dynamique à temps égaux.	11
1.3.2 Dans le cas de la CLFD.	13
1.4 Dérivation des équations de la LFD.	14
1.4.1 Équation définissant la masse, forme explicite.	15
1.4.2 Équation définissant le moment angulaire, forme explicite.	17
1.4.3 La Condition Angulaire.	17
1.4.4 Nouveaux opérateurs.	19
1.4.5 Opérateur \hat{A}^2	20
1.5 Quelques propriétés de la LFD.	21
1.5.1 Analogie avec l'équation de Schrödinger.	21
1.5.2 Règles diagrammatiques de la LFD.	21
1.5.3 Lois de conservation du quadri-moment des constituants.	23
1.6 Décomposition du vecteur d'état sur un espace de Fock.	24
1.6.1 Décomposition du vecteur d'état en composantes de Fock dans le cas scalaire	24
1.6.2 Équations pour une composante de Fock	26
1.6.3 Conséquences de la troncation de l'espace de Fock.	27
1.6.4 Dernières remarques.	27
2 Mécanique quantique non relativiste dans l'espace des moments	29
2.1 Équation de Schrödinger stationnaire dans l'espace des moments.	29
2.2 Calcul des états liés.	30
2.2.1 Décomposition angulaire.	31
2.3 États de diffusion à deux corps.	32

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1	La matrice S ou l'opérateur de diffusion.	34
2.3.2	La matrice T ou opérateur de transition.	36
2.3.3	Introduction du déphasage.	37
2.3.4	La matrice K ou matrice de réaction.	38
2.3.5	Étude du déphasage	40
2.4	Calcul des potentiels.	41
2.4.1	Problème de compacité des noyaux. Facteurs de forme.	42
2.4.2	Cas des particules scalaires.	43
2.4.3	Cas des fermions. Couplages scalaire, pseudo-scalaire	43
2.4.4	Décomposition angulaire des potentiels.	46
2.5	Dernières remarques.	47
3	Cas de particules scalaires dans la LFD. Calcul des états liés.	49
3.1	Paramétrisation du vecteur d'état.	51
3.1.1	Variables \vec{k} et \hat{n}	51
3.1.2	Variables \vec{R} et x	53
3.2	Calcul du noyau dans l'approximation <i>ladder</i>	54
3.2.1	Expression avec les variables \vec{k} et \hat{n}	55
3.2.2	Choix d'un repère.	56
3.3	États de moment angulaire total nul.	58
3.3.1	Décomposition angulaire des solutions.	58
3.3.2	Propriétés de $V_{\lambda\lambda'}$	59
3.4	Généralisation pour des moments angulaires quelconques.	61
3.4.1	États propres de \hat{A}^2	61
3.4.2	Équation pour les états liés.	63
3.4.3	Cas de l'onde P	65
3.4.4	Propriétés de $V_{\lambda\lambda'}^\mu$	66
3.5	Méthode de résolution des équations.	68
3.5.1	Calcul analytique partiel du noyau.	69
3.5.2	Méthode numérique de résolution.	73
3.6	Résultats à l'approximation <i>ladder</i>	74
3.6.1	Onde S	74
3.6.2	Onde P	79
3.6.3	Dernières remarques concernant l'approximation <i>ladder</i>	85
3.7	Au-delà de l'approximation <i>ladder</i> : Prise en compte de la Self-énergie.	87
3.7.1	Fonction de Green à deux corps G . Effet de la self-énergie.	87
3.7.2	Équation pour les états liés	93
3.8	Résultats à l'approximation <i>ladder</i> +self-énergie.	95
3.8.1	Onde S	95
3.8.2	Onde P	103
3.9	Dernières remarques.	105
4	Diffusion relativiste dans le cas des particules scalaires.	107
4.1	Équation pour les états de diffusion.	108
4.1.1	Équation pour la matrice T	109
4.1.2	Équation pour la matrice K	109

4.2	États d'un moment angulaire quelconque.	110
4.2.1	Décomposition angulaire.	110
4.2.2	Extraction des déphasages.	111
4.3	Approximation <i>ladder</i> : Propriétés du noyau.	112
4.3.1	Propriétés des $V_{\lambda\lambda'}^\mu$	113
4.3.2	Seuil de création inélastique.	114
4.3.3	Propriétés du noyau au-delà du seuil inélastique.	115
4.3.4	Déphasage inélastique.	116
4.4	Résolution de l'équation.	117
4.4.1	Calcul analytique partiel des noyaux.	118
4.4.2	Méthode de résolution numérique.	119
4.5	Résultats pour la diffusion élastique.	124
4.5.1	Onde S.	124
4.5.2	Onde P.	129
4.6	Résultats pour la diffusion inélastique.	140
4.6.1	Évolution du déphasage imaginaire en fonction de α au voisinage du seuil.	141
4.7	Origine de la brisure d'unitarité de la matrice S à l'approximation <i>ladder</i>	142
4.7.1	Calcul perturbatif de l'amplitude de diffusion inélastique.	142
4.8	Rétablissement de l'unitarité de la matrice S . Prise en compte de la self- énergie.	149
4.8.1	Prise en compte de la self-énergie dans un calcul perturbatif au voisinage du seuil	149
4.8.2	Prise en compte de la self-énergie : Modification du propagateur.	150
4.8.3	Équation renormalisée pour la diffusion.	150
4.8.4	Décomposition angulaire.	151
4.9	Résultats à l'approximation <i>ladder</i> + <i>Self-énergie</i>	152
4.9.1	Résultats pour l'onde S	152
4.9.2	Résultats pour l'onde P	158
4.10	Dernières remarques.	162
5	Cas des fermions dans la LFD. Calcul des états liés et des états de diffusion.	163
5.1	Fonction d'onde à deux corps. Noyau d'interaction.	164
5.2	États liés pour un système de moment angulaire total $J^\pi = 0^+$	167
5.2.1	Équation pour les états liés.	169
5.2.2	Différents couplages.	170
5.2.3	Stabilité des solutions. Introduction d'un facteur de forme.	171
5.2.4	Décomposition angulaire. Calcul du potentiel projeté $V_{ij,\lambda,\lambda'}$	171
5.2.5	Méthode de résolution des équations.	174
5.3	Résultats pour l'état 0^+	175
5.3.1	Couplage scalaire.	175
5.3.2	Couplage pseudo-scalaire.	179
5.4	États de diffusion pour l'état $J^\pi = 0^+$	183
5.4.1	Décomposition angulaire de l'équation pour la diffusion.	184
5.4.2	Extraction des déphasages.	185

TABLE DES MATIÈRES

5.4.3	Ouverture d'un canal inélastique.	185
5.4.4	Méthode de résolution.	185
5.5	Résultats pour l'état 0^+ avec un couplage scalaire.	186
5.5.1	Comparaison des déphasages δ_+ et δ_-	186
5.5.2	Calcul des énergies de liaison par les paramètres à basse énergie . .	187
5.5.3	Comparaison avec le modèle de Wick-Cutkosky.	190
5.5.4	Déphasages inélastiques.	190
5.5.5	Quelques remarques sur la diffusion dans le cas du couplage pseudo- scalaire.	193
5.6	Dernières remarques.	193
Conclusions.		195
Annexe		
I	Règles diagrammatiques de la LFD.	i
I.1	Cas des systèmes à spin 0	i
I.2	Cas des systèmes à spin $\frac{1}{2}$	ii
II	Volume de l'espace de phases à trois corps	iii
III	Fonctions F_λ^μ	v
IV	Déphasage inélastique à partir de la condition d'unitarité de la matrice S.	ix
IV.1	Lien entre l'amplitude \mathcal{F} et le déphasage.	ix
IV.2	Cas d'un canal inélastique.	x
V	Formulaire : matrices de Pauli, spineurs, etc.	xiii
VI	Détails sur les méthodes numériques	xv
VI.1	Résolution par la méthode des <i>splines</i>	xv
VI.1.1	Splines cubiques ou d'interpolation d'Hermite.	xv
VI.1.2	Résolution d'une équation intégrale à une dimension.	xv
VI.1.3	Détails sur la programmation.	xvi
VI.1.4	Différentes grilles. Paramètres du calcul.	xvi
VI.1.5	Paramètres des intégrations numériques.	xvii
VI.1.6	Paramètres pour le calcul des états liés.	xvii
Liste des tableaux.		xix
Liste des figures.		xx
Bibliographie		1

Introduction.

La théorie quantique des champs est l'aboutissement d'un long processus commencé au début du XX^e siècle avec les progrès parallèles de la mécanique quantique et de la connaissance de la géométrie de l'univers dans le cadre de la relativité restreinte, puis générale. Le développement de cette théorie a été très fécond, dans des domaines qui semblaient *a priori* étrangers, tels que la physique de particules, l'étude des phénomènes critiques en physique statistique, la cosmologie, etc.

C'est dans le cadre de la théorie quantique des champs que des développements considérables ont été atteints dans la compréhension de la physique subatomique. Le pouvoir prédictif de cette théorie est remarquable, l'accord entre ses prédictions et l'expérience arrivant à des précisions jamais atteintes avant ¹. Il reste néanmoins quelques zones d'ombre. La première, de nature profonde, est que la théorie quantique des champs est inadaptée à la description de la gravitation. D'autres problèmes sont de nature plus pratique, ayant trait à la grande complexité de résolution de la théorie, dès qu'il s'agit d'étudier des systèmes complexes, comme la physique des systèmes à quelques corps *Few-Body Physics* ou en général, l'interaction forte.

Ces difficultés apparaissent en particulier dans le traitement des systèmes hadroniques. L'une des raisons est qu'un traitement non-perturbatif devient nécessaire dès que les constantes de couplage sont importantes, ce qui est le cas pour l'interaction forte. Ce besoin se fait aussi sentir pour des théories qui comme la QED, font jouer des constantes de couplage faibles, dès qu'il s'agit de traiter, par exemple, des états liés. Dans un tel cas, une approche perturbative ne permet pas de décrire correctement ces états, qui correspondent à des pôles de la matrice de diffusion S .

Pendant assez longtemps, le traitement des systèmes hadroniques s'est inscrit dans le cadre d'une formulation non-relativiste. Des résultats intéressants et des prédictions précises ont été obtenus, et une telle approche continue d'être indispensable à la *Few-Body Physics* pour le traitement des systèmes à trois corps, quatre corps ou d'avantage. Il est apparu néanmoins qu'une description non-relativiste est insuffisante pour décrire correctement des nouveaux faits expérimentaux, comme par exemple des mesures sur la structure interne du deuton effectuées au Thomas Jefferson National Accelerator Facility (TJNAF²), obtenues par la diffusion élastique $e - d$ pour des moments de transfert importants. En effet, ces mesures [1, 2, 3, 4] sont effectuées avec des moments transférés allant jusqu'à $6(GeV/c)^2$, donnant au deuton une impulsion comparable à sa masse. Dans ce cas, un traitement relativiste s'impose.

1. Par exemple, le moment magnétique anormal de l'électron prédit par la QED (*l'électrodynamique quantique*) est en accord avec les mesures expérimentales avec huit chiffres significatifs.

2. Anciennement, le CEBAF.

Tout traitement relativiste cohérent des systèmes à quelques corps passe par la description relativiste des états liés et des états de diffusion. Trois types d'approches ont été développées pour un tel traitement relativiste des systèmes hadroniques. Une première approche est donnée par les calculs sur réseau (*Lattice QCD*), dans laquelle le traitement du système passe par une discrétisation de l'espace-temps. Deux autres approches ont en commun d'être non-perturbatives (dans le sens de la constante de couplage) mais fondées sur l'approximation consistant à restreindre l'espace de Fock, c'est-à-dire, à fixer le nombre de particules du système. La première est fondée sur le formalisme de Bethe et Salpeter [5], qui est un formalisme quadri-dimensionnel explicitement covariant et dont le calcul des amplitudes définissant l'interaction se fait à l'aide des règles diagrammatiques de Feynmann. Il existe plusieurs réductions tri-dimensionnelles à ces équations. Cette approche a cependant quelques inconvénients, en particulier la complexité du vide dans cette théorie ou l'existence de solutions non physiques.

L'autre approche est la dynamique sur le front de lumière ou *Light-Front Dynamic* (LFD). Il s'agit de l'une des cinq formes hamiltoniennes respectant l'invariance de Poincaré et décrites pour la première fois par Dirac [6, 7]. Dans cette théorie, le vecteur d'état du système est défini sur un hyperplan tangent au cône de lumière. Dans la formulation habituelle de cette théorie [6, 8, 9], ce plan est donné par $t + z/c = cte$. Il s'agit d'une formulation équivalente au formalisme usuel (qui, lui, est défini sur le plan $t = cte$) dans un référentiel d'impulsion infinie [10]. Ceci se traduit qualitativement par un ralentissement du système, à cause de la dilatation temporelle due au *boost*, ce qui semble très favorable à l'étude des systèmes à haute énergie. Cette formulation a cependant le désavantage de ne pas être covariante. Une formulation explicitement covariante de la LFD a été introduite par Karmanov [11]³. Dans cette approche, les vecteurs d'état sont définis sur le plan $\omega \cdot x = cte$, où ω est un quadri-vecteur de genre lumière. Le 4-vecteur ω définit un degré de liberté non physique, mais qui ne doit pas influencer les résultats physiques calculés.

Ce travail de thèse est consacré à l'étude de la diffusion relativiste –élastique et inélastique– dans l'approche covariante de la Light-Front Dynamics. Il suit un précédent travail de thèse effectué par Mariane Mangin-Brinet [13] sous la direction de Jaume Carbonell, qui traitait les états liés d'un système à deux corps. L'étude des états de diffusion est une suite logique à ce précédent travail, nous permettant d'obtenir une description cohérente des systèmes à deux corps dans la cadre de la LFD. C'est dans cette optique que nous allons nous attacher tout d'abord à obtenir des états liés, puis les états de diffusion.

Ce document est organisé de la façon suivante : Dans le premier chapitre, nous allons tout d'abord introduire le formalisme de la LFD explicitement covariante à partir des propriétés du groupe de Poincaré et d'autres considérations d'ordre général. Le deuxième chapitre introduit des notions de base de la mécanique quantique non-relativiste, ce qui va nous permettre d'explicitier les conventions utilisées tant pour les états liés que pour les états de diffusion. Ce sera une base utile pour étendre ensuite l'étude aux systèmes relativistes. Le chapitre 3 et le chapitre 4 sont intimement liés. Dans ces chapitres nous allons étudier un modèle non-physique d'interaction entre deux particules scalaires, *i.e.* sans spin, à l'approximation *ladder*. Le chapitre 3 traite des états liés à l'aide d'une décomposition angulaire qui sera utile dans le chapitre 4 pour l'étude des états de diffusion. Nous verrons aussi qu'un traitement adéquat de la diffusion inélastique exige d'aller au-

3. Voir aussi [12].

delà de l'approximation *ladder* en prenant en compte la self-énergie. Ce sera fait aussi pour les états liés. Enfin, le chapitre 5 traite le cas d'un système à deux fermions en suivant une démarche équivalente à celle suivie pour les particules scalaires.

Chapitre 1

Bases du formalisme de la mécanique quantique sur le front de lumière

Pour déterminer la dynamique d'un système, il est possible de suivre deux types d'approche équivalentes, traditionnellement nommées *lagrangienne* et *hamiltonienne*. Pour des raisons historiques, la mécanique quantique non relativiste a été construite en suivant un formalisme hamiltonien. Ceci est dû à la facilité avec laquelle il est possible de construire formellement cette théorie par une extension naturelle de l'approche hamiltonienne de la mécanique classique. Cependant, cette approche a posé quelques problèmes lorsqu'il a été question de développer une théorie quantique relativiste.

En effet, dans l'approche hamiltonienne de la mécanique classique, le temps t joue un rôle particulier, l'hamiltonien étant une constante du mouvement dans les systèmes conservatifs. Dans la mécanique quantique non relativiste, le temps joue encore un rôle particulier intimement lié à l'hamiltonien, comme il est évident dans l'équation de Schrödinger. Or dans une théorie relativiste, toutes les directions de l'espace-temps doivent jouer un rôle équivalent, ce qui n'est pas le cas lorsque le temps joue un rôle prépondérant. Ce problème intéressa beaucoup de physiciens vers les années 1930, dont particulièrement Paul Dirac.

Pendant un certain temps, les difficultés inhérentes à rendre covariante l'approche hamiltonienne signifia l'abandon de toute tentative pour élaborer une formulation hamiltonienne de la dynamique quantique relativiste. Ce problème fut néanmoins abordé à nouveau par Dirac en 1949 [6] dans un article resté célèbre. Dans cet article, il partit de l'invariance se trouvant à la base de tout système relativiste, en étudiant le groupe de Poincaré¹, ce qui lui permit de relier les dix quantités fondamentales de ce groupe (appelés les *générateurs du groupe*) aux quantités fondamentales régissant une particule dans ce système. Ces générateurs *définissent complètement* la dynamique d'un système. Il retrouva en particulier, par un choix pertinent des générateurs, l'hamiltonien habituel. Il constata cependant que ce choix des générateurs n'est pas unique et qu'il est possible de contruire d'autres opérateurs conduisant à d'autre formes dynamiques relativistes. Il put en identifier deux supplémentaires.

Dans ce chapitre, nous allons dériver les équations correspondant à l'une de ces nouvelles formes dynamiques, celle qu'il a nommée la *front-form* ou dynamique sur le front de lumière. Nous allons développer cette approche dans une formulation explicitement

1. ou groupe de Lorentz inhomogène

covariante introduite par Karmanov [11]. La démarche suivie est celle montrée par Carbonell, Desplanques, Karmanov et Mathiot dans [12]. Nous allons tout d'abord faire un bref rappel des formes dynamiques possibles, afin de présenter une justification de notre choix. Ensuite, nous allons contruire les générateurs du groupe correspondant à ce choix, à partir de deux résultats importants : le théorème de Noether, qui permet d'obtenir des quantités conservées d'un système –nommées des *charges* et des *courants*– à partir de ses symétries fondamentales, ainsi qu'un second résultat qui prouve que ces charges sont des générateurs d'un groupe.

Par la suite, nous construirons les générateurs du groupe de Poincaré correspondant à la dynamique sur le front de lumière à partir des charges. Or nous verrons que le calcul des charges revient à choisir une surface d'intégration dans l'espace-temps. Les équations du mouvement seront ensuite dérivées en exigeant que les vecteurs d'état du système soient vecteurs propres des opérateurs dits *opérateurs de Casimir*, *i.e.* qui commutent avec tous les générateurs. Ces équations sont des équations dynamiques, c'est-à-dire, faisant intervenir l'interaction. Pour avoir un maximum d'équations cinématiques –qui ne font pas intervenir l'interaction– une nouvelle condition sera introduite, la *condition angulaire*.

Pour finir, le vecteur d'état sera décomposé sur une base de Fock. La résolution de l'ensemble des équations du mouvement sera faite sur un nombre fini de composantes, c'est-à-dire, sur une troncation de l'espace de Fock. Nous verrons à la fin de ce chapitre que la troncation de l'espace de Fock détruit les relations de commutation entre les générateurs du groupe de Poincaré. Les solutions recherchées ne sont alors que des solutions approchées, qui doivent tendre vers les solutions physiques lorsque une infinité de composantes de Fock sont prises en compte.

1.1 Formes de dynamiques hamiltoniennes

Partons d'un système physique invariant sous certaines transformations représentées par un groupe G . Ce groupe est paramétré par un certain nombre de générateurs g_i qui peuvent être obtenus à partir des charges invariantes du système, elles-mêmes pouvant être dérivées des symétries fondamentales du système. Or la procédure de construction des charges impose –comme nous verrons par la suite – le choix d'une certaine surface Σ de l'espace-temps nommée *surface de quantification*. Associons à Σ le sous-groupe G_Σ de G dont l'action plonge tout élément de Σ en Σ . Ce sous-groupe est appelé *groupe de stabilité* de G .

Les générateurs de G_Σ sont indépendants de l'interaction. Ils sont appelés des générateurs *cinématiques*. Pour donner un sens physique à Σ , il faut imposer comme condition supplémentaire que toutes les lignes d'univers possibles doivent l'intersecter une seule et unique fois, ce qui permet aux générateurs associés de décrire correctement tout état possible du système. Les autres générateurs dépendent de l'interaction et sont nommés des générateurs *dynamiques*. Ils déterminent l'évolution du système entre différentes surfaces Σ équivalentes.

Dans le cas de la mécanique non-relativiste, où l'invariance fondamentale est donnée par le groupe de Galilée², une telle surface est unique. En effet, la seule surface pouvant

2. Dont les générateurs sont les rotations d'espace (J_i), les translations d'espace (P_i), les transformations de Galilée pures entre deux référentiels galiléens (K_i) et les translations dans le temps (H).

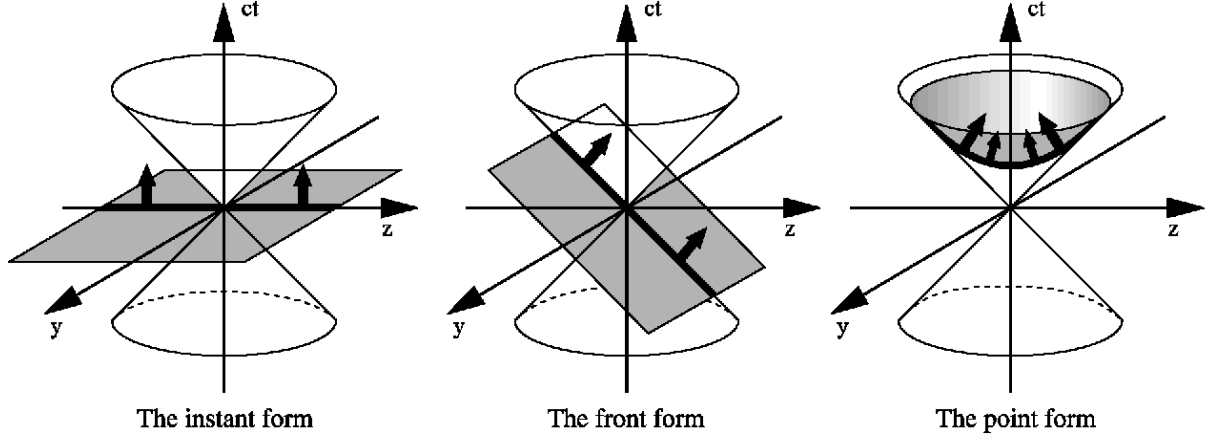


FIG. 1.1 – Représentation des surfaces correspondant aux trois formes dynamiques trouvées par Dirac dans son article fondateur de 1949.

intersecter toutes les lignes d'univers une seule et unique fois est la surface à temps constant $x^0 = cte$, ce qui implique qu'il n'existe qu'une seule approche hamiltonienne possible permettant de décrire le système. Cet unique choix de surface est le seul pouvant séparer les dix générateurs de ce groupe en une partie cinématique (neuf générateurs) et une partie dynamique, avec le générateur des translations dans le temps, l'hamiltonien H . Cet opérateur détermine l'évolution du système entre des plans $x^0 = cte$ parallèles, ce qui est conforme au rôle classique de H .

Par contre, cette unicité du choix des générateurs n'existe plus lorsque nous étudions un système relativiste, où l'invariance fondamentale est donnée par le groupe de Poincaré. Ceci a été remarqué en premier par Dirac dans son article de 1949 [6] : *l'unicité des approches hamiltoniennes non relativistes se perd dans le cas relativiste*.

Dans le cas de l'invariance de Poincaré, un certain nombre de surfaces inéquivalentes peuvent être arbitrairement choisies. Leutwyler et Stern [7], s'appuyant sur des résultats mathématiques relatifs à la classification des sous-groupes du groupe de Poincaré, prouvèrent qu'il n'existe que cinq types de surfaces Σ dont les sous-groupes invariants sont transitifs, c'est-à-dire, pour lesquelles tout élément de Σ peut-être transformé (*map*) en autre élément de Σ par un élément du groupe de stabilité G_Σ .

Ces cinq surfaces sont ³ :

- i. $x_0 = a = cte$ (dynamique à temps égaux ou *Equal time*)⁴ ;
- ii. $x_0 - x_3 = a$ (dynamique sur le front de lumière⁵ ou *Front form*) ;
- iii. $x^2 = a^2$ (*Point form*) ;
- iv. $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2$;
- v. $x_0^2 - x_3^2 = a^2$

3. Nous choisissons le système d'unités où $\hbar = c = 1$.

4. Dite aussi *instant form*

5. En anglais : *light front dynamics*, *LFD* ou bien *light-cone*.

Dirac traite dans son article les trois premiers cas, dont les surfaces de quantification sont montrées dans la figure⁶ (1.1). Par analogie avec le cas galiléen, le choix habituel de surface est le plan à temps constant (i). Si c'est le choix de surface le plus intuitif, il ne s'agit pourtant pas d'une formulation covariante.

Dans ce cas de la *Front form*, l'approche la plus répandue consiste à considérer un choix de surface fixe⁷, par exemple $x_0 - x_3 = a$. Il est néanmoins intéressant de développer une approche explicitement covariante, la ECLFD (*Explicitly covariant light-front dynamics*), qui a été développée en premier par Karmanov [11, 12], en choisissant une surface paramétrée par :

$$\omega \cdot x = \sigma$$

où ω est un 4-vecteur de genre lumière ($\omega^2 = 0$) et σ une constante.

Bien qu'il ne soit pas encore prouvé formellement que la physique soit invariable indépendamment du choix de Σ , il est probable qu'elle le soit⁸. Le choix d'une surface de quantification est alors motivé par les avantages «pratiques» que la forme hamiltonienne choisie peut avoir par rapport aux autres formes. Il est donc très intéressant de choisir une surface Σ permettant de minimiser le nombre des générateurs dynamiques. Regardons le nombre de générateurs dynamiques et cinétiques de chacune des formes dynamiques possibles.

Surface :	i	ii	iii	iv	v
Générateurs Cinématiques	6	7	6	4	4
Générateurs Dynamiques	4	3	4	6	6

La *front form* est la forme dynamique qui minimise le nombre de générateurs dynamiques. Nous montrerons par la suite que ce choix est aussi intéressant pour d'autres raisons, en particulier par la grande simplicité du vide dans cette théorie.

1.2 Construction des générateurs d'un groupe.

1.2.1 Théorème de Noether

Montrons tout d'abord un résultat très important qui permet d'extraire des quantités conservées (les *courants* et les *charges*) à partir des symétries fondamentales d'un système. Prenons pour cela un champ ϕ^α subissant une transformation qui laisse l'action invariante $\delta S = 0$ sur un volume infini. Remarquons que le système est invariant sous cette transformation, qui correspond donc à l'existence d'une symétrie sous-jacente. D'une façon générale, cette transformation modifie les champs et les coordonnées par :

$$\phi^\alpha \rightarrow \phi'^\alpha(x') = \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x)$$

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\delta\hat{\phi}(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \delta\phi(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \phi + \mathcal{O}(2)$$

6. Cette image a été prise de [8]

7. Voir Pinsky et al. [8]

8. Voir [14] pour plus de détails.

CHAPITRE 1. BASES DU FORMALISME DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE SUR LE FRONT DE LUMIÈRE

Le lagrangien est modifié par cette transformation ; au premier ordre, son expression est donnée par :

$$\mathcal{L}(\phi'^\alpha, \partial_\mu \phi'^\alpha, x') = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha} \delta \hat{\phi}^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \delta \partial_\mu \hat{\phi}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

Cette transformation fait passer du volume V au volume V' . Regardons la variation de l'action au premier ordre :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{V'} d^4x \mathcal{L}(\phi'^\alpha, \partial_\mu \phi'^\alpha, x) - \int_V d^4x \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x) \\ &= \int_{V'} d^4x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha} \delta \hat{\phi}^\alpha + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \delta \partial_\mu \hat{\phi}^\alpha + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \right) \end{aligned}$$

expression qui se transforme, en utilisant l'équation du mouvement :

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\alpha}$$

pour obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{V'} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \delta \hat{\phi}^\alpha + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) \\ &= \int_{V'} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \delta \phi^\alpha - \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \partial^\nu \phi^\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \delta x_\nu \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Courant conservé.

Il apparaît dans l'équation (1.1) qu'il existe une quantité conservée :

$$j^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} - \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^\alpha} \partial^\nu \phi^\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \quad (1.2)$$

Ce 4-vecteur j^μ est appelé le *courant* conservé associé à la transformation effectuée.

Charge conservée.

Choisissons maintenant un volume d'intégration délimité par une surface. Le théorème de Green appliqué à l'équation (1.1) permet désormais de définir une autre quantité conservée :

$$Q = \int_{\partial V} j^\mu dS_\mu$$

où ∂V est la surface qui délimite le volume V . La quantité Q est nommée la *charge* conservée associée à la transformation.

L'obtention des courants et des charges est facile à partir de toutes les transformations qui laissent invariante l'action, *i.e.* des symétries fondamentales du système. La question qui se pose est de savoir si ces charges ont un lien avec le groupe associé à la symétrie.

1.2.2 Lien entre les charges et les générateurs d'un groupe.

Prouvons que les charges construites par la procédure de Noether sont des générateurs du groupe respectif⁹. Considérons le cas très général de N champs en interaction ϕ_i , $\{i = 1, \dots, N\}$, regroupés en un vecteur Φ appartenant à un espace de dimension N . Ces champs se transforment selon un groupe de Lie G compact¹⁰, dont les générateurs T^s obéissent à la relation de commutation suivante :

$$[T^s, T^t] = C^{st}_u T^u$$

où les C^{st}_u sont les constantes de structure, qui peuvent être choisies antisymétriques. Les T^s sont antihermitiques. La variation du champ sous une transformation infinitésimale $\delta\alpha_s$ laissant l'action invariante s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta\Phi(x) = \delta\alpha_s T^s \Phi(x)$$

le lagrangien se transformant selon : $\mathcal{L}(\Phi) \longrightarrow \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi) = \hat{\mathcal{L}}$. La variation de l'action s'exprime alors sous la forme suivante¹¹ :

$$0 = \delta S = \int d^4x \delta\alpha_s \left\{ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta\alpha_s} + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_\mu \delta\alpha_s]} \partial_\mu \delta\alpha_s \right\} = \int d^4x \delta\alpha_s \left\{ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta\alpha_s} - \partial_\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_\mu \delta\alpha_s]} \right\}$$

Les courants conservés ont alors l'expression suivante :

$$j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_\mu \delta\alpha_s]}$$

Pour que la variation de l'action soit nulle, il faut donc que la divergence du courant soit donnée par l'équation :

$$\partial_\mu j_s^\mu(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \delta\alpha_s}$$

Sur la surface de quantification à temps constants, le courant est une constante par rapport au temps et la charge associée est donnée par la relation :

$$Q_s = \int d^3x j_s^0(\vec{x}, t)$$

Exprimons cette charge en fonction des champs et des générateurs. Pour cela, définissons les champs conjugués par :

$$\pi_s(\vec{x}, t) = \frac{\partial L}{\partial \partial_0 \phi_s(\vec{x}, t)} = \frac{\delta}{\delta \partial_0 \phi_s(\vec{x}, t)} \int d^3y \mathcal{L}(\vec{y}, t)$$

et de manière analogue au champ Φ définissons un champ Π à N composantes. Les relations canoniques de commutation s'écrivent :

$$\begin{cases} [\Pi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{y}, t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}, t)] = [\Phi(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}, t)] = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

9. Nous suivons ici la démonstration présentée dans la section 1-2-3 de [15]

10. Avec une représentation dans cet espace de dimension N

11. Le dernier terme vient d'une intégration par parties, en supposant que les champs s'annulent à l'infini.

Regardons maintenant $\hat{\mathcal{L}}$. Remarquons que sa dépendance en $\partial_0 \delta \alpha_s$ vient uniquement de la dépendance en $\partial_0 \phi_i(x)$ de \mathcal{L} . Le courant $j_s^0(x)$ s'écrit donc :

$$j_s^0(x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial [\partial_0 \delta \alpha_s(x)]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \phi_i(x)]} T_{ij}^s \phi_j(x) = \Pi(x) T^s \Phi(x)$$

et la charge associée s'écrit simplement sous la forme :

$$Q^s(x) = \int d^3x \Pi(x) T^s \Phi(x)$$

Il est facile dès lors, en utilisant les relations de commutation (1.3), de calculer les commutateurs de charges :

$$[Q^s, Q^r] = \int d^3x d^3y [\Pi(x) T^s \Phi(x), \Pi(y) T^r \Phi(y)] = - \int d^3x \Pi(x) [T^s, T^r] \Phi(x)$$

Ce qui prouve donc que les charges sont des générateurs du groupe :

$$[Q^s, Q^r] = -C^{st}_u Q^u \quad (1.4)$$

Ce résultat a été prouvé en utilisant, pour le calcul des charges, la surface de quantification à temps constants. Nous admettrons néanmoins ce résultat pour toute surface de quantification. Nous allons par la suite considérer le groupe de Poincaré afin de construire ses générateurs, d'abord en utilisant la surface de quantification à temps constants, ensuite sur le front de lumière.

1.3 Générateurs du groupe de Poincaré.

1.3.1 Dans la dynamique à temps égaux.

Notre système physique est invariant sous les transformations du groupe de Poincaré, défini par la relation :

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

où les Λ^μ_ν peuvent être écrits sous forme infinitésimale :

$$\Lambda^\mu_\nu = g^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (1.5)$$

Tenseur Énergie-Impulsion.

Considérons d'abord le cas des translations infinitésimales :

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$$

Sous cette translation, le champ ϕ se transforme selon :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) + \delta\phi$$

Comme il n'y a pas de dépendance dérivative du lagrangien, il est possible d'écrire immédiatement le courant conservé sous la forme :

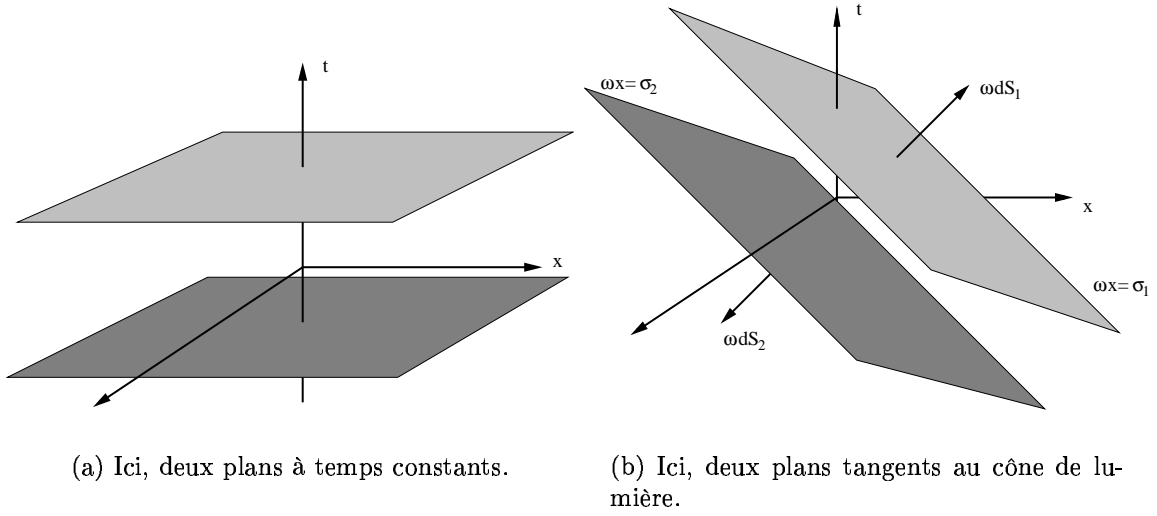


FIG. 1.2 – Surfaces délimitant le volume d'intégration dans la théorie standard et dans la LFD.

$$j^{\mu*} = T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.6)$$

Ce courant est nommé le *tenseur d'énergie-impulsion*. Ce tenseur, comme tout courant, est conservé à l'intérieur d'une surface fermée donnée :

$$\int_V d^4x \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Pour obtenir la charge conservée correspondante, il suffit d'appliquer le théorème de Green sur cette surface. Le théorème de Green nous donne une relation de conservation globale du flux du courant sur l'ensemble d'une surface fermée ∂V orientée. Pour obtenir une quantité conservée, nous devons choisir une surface qui «casse le flux», c'est-à-dire, une surface ayant deux parties disjointes qui peuvent être arbitrairement placées à l'infini, où les champs sont – par hypothèse – nuls. Dans la théorie des champs standard, cette surface est celle montrée dans la figure (1.2) et peut être paramétrée, en dehors des parties se trouvant à *l'infini*, à l'aide du 4-vecteur $\hat{n} = (1, 0, 0, 0)$ par :

$$dS_\mu = \hat{n} \delta(x^0 - \tau) d^4x = \delta_{\mu 0} d^3\vec{x}$$

Ce qui permet donc d'écrire :

$$\int_V d^4x \partial_\mu T^{\mu\nu} = \int_{\partial V} dS_\mu T^{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} T^{0\nu}$$

Dans ce cas, nous pourrions écrire la relation suivante :

$$\left[\int d^3\vec{x} T^{0\nu} \right]_{\text{surface } t=\tau} + \left[\int d^3\vec{x} T^{0\nu} \right]_{\text{surface } t=-\tau} = 0$$

Cette relation est indépendante de la position des hyperplans $t = \pm\tau$, nous pouvons donc en déduire l'existence de quatre quantités conservées. Cette charge correspond à l'opérateur impulsion :

$$\hat{P}^\mu = \int_{\partial V} d^3\vec{x} T^{0\mu}$$

Tenseur $\hat{J}_{\mu\nu}$.

Considérons maintenant une rotation infinitésimale. La transformation infinitésimale des rotations¹², $\omega_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique de rang 2.

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion est un courant conservé. Il suit qu'un courant de type :

$$j^\mu = T^{\mu\nu} \omega_{\nu\rho} x^\rho$$

l'est aussi quelle que soit $\omega_{\nu\rho}$ antisymétrique. Il est proportionnel à $T^{\mu\nu}$. Il est possible de construire un autre courant conservé indépendant à partir de ce courant, utilisant les propriétés d'antisymétrie du tenseur $\omega_{\nu\rho}$.

$$J^{\mu,\nu\rho} = (T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu) \omega_{\nu\rho}$$

Ce courant est conservé. Sa charge associée se construit en intégrant le courant sur la surface indiquée dans la figure (1.2). Nous aurons alors :

$$\hat{J}^{\nu\rho} = \int d^3\vec{x} J^{0,\nu\rho} = \int d^3\vec{x} (T^{0\nu} x^\rho - T^{0\rho} x^\nu)$$

Remarquons que nous venons de construire dix charges conservées indépendantes, les quatre P^μ et les six $J^{\nu\rho}$ (ce tenseur est antisymétrique par construction). Il s'agit, comme nous l'avons montré dans la section précédente, des dix générateurs du groupe de Poincaré.

1.3.2 Dans le cas de la CLFD.

La version explicitement covariante de la LFD est obtenue en considérant un volume délimité par des surfaces définies par :

$$\omega \cdot x = \sigma$$

où ω est un 4 - *vecteur* de genre lumière $\omega^2 = 0$. Il s'agit d'une surface parallèle au cône de lumière –voir figure (1.2). Cette paramétrisation de la surface d'intégration est explicitement covariante.

Nous suivrons la même procédure, en faisant apparaître explicitement le choix de la surface dans la procédure d'intégration. Ce choix avait été fait implicitement dans le formalisme à temps égaux. Les générateurs du groupe de Poincaré seront alors donnés par¹³ :

$$\hat{P}^\mu = \int T^{\mu\nu}(x) \omega_\nu \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \quad (1.7)$$

12. Voir la forme des transformations infinitésimales dans (1.5).

13. Nous garderons la même notation que dans la théorie standard.

$$\hat{J}^{\mu\nu} = \int (T^{\rho\mu} x^\nu - T^{\rho\nu} x^\mu) \omega_\rho \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \quad (1.8)$$

Notons que ces générateurs sont explicitement covariants.

Opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré.

Ces opérateurs obéissent aux relations de commutations suivantes, définissant l'algèbre de Poincaré :

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0$$

$$[\hat{P}_\mu, \hat{J}_{\kappa\rho}] = ig_{\mu\rho} \hat{P}_\kappa - ig_{\mu\kappa} \hat{P}_\rho$$

$$[\hat{J}_{\mu\nu}, \hat{J}_{\kappa\rho}] = ig_{\mu\kappa} \hat{J}_{\nu\rho} - ig_{\nu\kappa} \hat{J}_{\mu\rho} + ig_{\nu\rho} \hat{J}_{\mu\kappa} - ig_{\mu\rho} \hat{J}_{\nu\kappa}$$

Les deux opérateurs de Casimir, c'est-à-dire, les opérateurs qui commutent avec tous les générateurs sont \hat{P}^2 et \hat{S}^2 , ce dernier étant construit à partir de l'opérateur :

$$\hat{S}_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}_\nu \hat{J}_{\rho\sigma}$$

Cet opérateur est dit de Pauli-Lubanski¹⁴.

1.4 Dérivation des équations de la LFD.

Nous venons de contruire les générateurs du groupe de Poincaré, *i.e.* la base de son algèbre de Lie associée¹⁵, correspondant à la *front form*. Comment, dès lors, définir des équations régissant la dynamique du système à partir de ces générateurs ?

Dans une formulation relativiste, l'hypothèse de départ est de considérer que la physique est invariante sous les transformations du groupe de Poincaré. Toute quantité mesurée d'un système physique doit donc rester invariante sous ces transformations. Or toute l'information du système est contenue dans un *vecteur d'état* $|\Psi\rangle$. Afin de respecter l'invariance de vecteur d'état sous toutes les transformations du groupe, c'est-à-dire, sous chaque générateur, nous exigerons que ce vecteur soit vecteur propre des opérateurs \mathcal{C} qui commutent avec tous les générateurs du groupe, c'est-à-dire, avec les opérateurs de Casimir. Les équations de la dynamique seront alors obtenues à partir de cette exigence. Les deux premières équations de la LFD peuvent s'écrire ainsi directement :

$$\hat{P}^2 \Psi(p) = M^2 \Psi(p)$$

$$\hat{S}^2 \Psi(p) = -M^2 J(J+1) \Psi(p)$$

En analogie avec la théorie standard, M^2 est appelé le carré de la masse totale du système et J son moment angulaire total. Ces valeurs propres sont choisies positives.

14. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur antisymétrique, avec $\epsilon_{0123} = 1$

15. On parle aussi de *base de Lie*

Deux autres conditions.

Les vecteurs d'état qui obéissent aux dernières conditions sont nombreux. Il existe forcément une dégénérescence. Il est donc nécessaire d'introduire d'autres conditions permettant de lever l'ambiguïté. Nous nous intéressons seulement aux systèmes ayant une impulsion p et une projection¹⁶ λ du moment angulaire bien définies dans le référentiel au repos. Nous imposerons donc au vecteur d'état d'être vecteur propre de l'opérateur impulsion \hat{P}_μ et de l'opérateur moment cinétique $\hat{J}_{\mu\nu}$. Il est plus intéressant d'écrire la seconde condition en fixant une projection du moment angulaire sur l'axe z . Nous utilisons pour cela l'opérateur de Pauli-Lubanski \hat{S}_3 . Deux nouvelles conditions sont fixées :

$$\hat{P}_\mu \Psi(p) = p_\mu \Psi(p) \quad \text{et} \quad \hat{S}_3 \Psi(p) = M\lambda \Psi(p)$$

En résumé, quatre équations aux valeurs propres définissent le vecteur d'état du système :

$$\hat{P}^2 \Psi(p) = M^2 \Psi(p) \quad (1.9)$$

$$\hat{S}^2 \Psi(p) = -M^2 J(J+1) \Psi(p) \quad (1.10)$$

$$\hat{P}_\mu \Psi(p) = p_\mu \Psi(p) \quad (1.11)$$

$$\hat{S}_3 \Psi(p) = M\lambda \Psi(p) \quad (1.12)$$

1.4.1 Équation définissant la masse, forme explicite.

Regardons l'équation (1.9) en introduisant explicitement l'hamiltonien d'interaction du système. Décomposons le tenseur d'énergie-impulsion dans une partie libre et une partie d'interaction :

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{Int}$$

D'après (1.6), la partie libre peut s'écrire sous la forme suivante¹⁷ :

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{\delta \mathcal{L}^{(0)}}{\delta \partial^\mu \phi_i} \partial_\nu \phi_i - g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(0)}$$

Il y a une expression équivalente pour la partie en interaction.

L'opérateur impulsion \hat{P}_μ se décompose lui aussi en une partie libre et une partie d'interaction :

$$\hat{P}_\mu = \hat{P}_\mu^{(0)} + \hat{P}_\mu^{Int} = \int T_{\mu\nu}^{(0)}(x) \omega^\nu \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x + \int T_{\mu\nu}^{Int}(x) \omega^\nu \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x$$

¹⁶. Sur un axe z arbitraire.

¹⁷. Nous sommes sur l'ensemble des $\{i\}$ champs de la théorie.

Si le lagrangien d'interaction ne contient pas de couplage dérivatif, nous avons une relation simple entre l'hamiltonien d'interaction et $T_{\mu\nu}^{int}$ et \hat{P}_μ :

$$T_{\mu\nu}^{int}(x) = -g_{\mu\nu}\mathcal{L}^{Int} = g_{\mu\nu}\mathcal{H}^{Int}$$

et :

$$\hat{P}_\mu = \hat{P}_\mu^{(0)} + \omega_\mu \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x$$

En utilisant la condition $\omega^2 = 0$, nous pouvons alors écrire une nouvelle expression de l'opérateur \hat{P}^2 . L'équation (1.9) s'écrit donc sous la forme¹⁸ :

$$\hat{P}_{(0)}^2 \Psi(p) + \left\{ \hat{P}^{(0)} \cdot \omega, \int \mathcal{H}^{Int}(x) \right\} \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \Psi(p) = M^2 \Psi(p)$$

Or $\hat{P}^{(0)} \cdot \omega$ et $\mathcal{H}^{Int}(x)$ commutent ; en effet, regardons le commutateur $[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu]$:

$$\begin{aligned} [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] &= \left[\hat{P}_\mu^{(0)} + \omega_\mu \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x, \hat{P}_\nu^{(0)} + \omega_\nu \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \right] \\ 0 &= \left[\hat{P}_\mu^{(0)}, \omega_\nu \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \right] + \left[\omega_\mu \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x, \hat{P}_\nu^{(0)} \right] \\ 0 &= \int \left(\omega_\nu [\hat{P}_\mu^{(0)}, \mathcal{H}^{Int}(x)] + \omega_\mu [\mathcal{H}^{Int}(x), \hat{P}_\nu^{(0)}] \right) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \end{aligned}$$

et donc :

$$\omega_\nu [\hat{P}_\mu^{(0)}, \mathcal{H}^{Int}] + \omega_\mu [\mathcal{H}^{Int}, \hat{P}_\nu^{(0)}] = 0$$

Multiplions cette équation par ω^ν et sommons sur ν . Le terme en ω^2 est nul, donc $\hat{P}^{(0)} \cdot \omega$ commute avec l'hamiltonien d'interaction. L'équation définissant la masse s'exprime donc par :

$$(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2) \Psi(p) = 2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(x) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \Psi(p)$$

Dans cette équation nous avons séparé la partie libre de la partie d'interaction. Le terme de droite dépend de $\hat{P}^{(0)} \cdot \omega = \hat{P} \cdot \omega$. Nous cherchons à faire disparaître la dépendance en x en représentant la distribution δ par sa forme intégrale. Sous cette forme, nous faisons apparaître la transformée de Fourier du hamiltonien $\mathcal{H}^{Int}(k) = \int \mathcal{H}^{Int}(x) e^{ik \cdot x} d^4x$

$$\delta(\omega \cdot x - \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(\omega \cdot x - \sigma)\tau} d\tau$$

$$(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2) \Psi(p) = 2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) e^{-i\sigma\tau} \frac{d\tau}{2\pi} \Psi(p)$$

Le paramètre σ va jouer un rôle analogue au temps de l'équation de Schrödinger, le facteur $e^{-i\sigma\tau}$ jouant le rôle d'un opérateur d'évolution. Lorsque nous ne nous intéressons qu'aux états stationnaires, nous pouvons choisir $\sigma = 0$ pour obtenir une expression importante :

$$(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2) \Psi(p) = 2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \Psi(p) \quad (1.13)$$

18. La notation $\{, \}$ correspond à l'anticommutateur.

1.4.2 Équation définissant le moment angulaire, forme explicite.

Les équations (1.10) et (1.12) déterminent le moment angulaire total et sa projection sur l'axe z . Ces équations ne sont pas triviales car, de même que les équations (1.9) et (1.11) font intervenir $\hat{P}_\mu = \hat{P}_\mu^{(0)} + \hat{P}_\mu^{Int}$, elles font intervenir l'interaction :

$$\hat{S}_\mu = \hat{S}_\mu^{(0)} + \hat{S}_\mu^{Int}$$

Considérons un état d'impulsion nulle¹⁹ $\Psi(\vec{p} = \vec{0})$. Par construction, nous aurons :

$$P^i \Psi(\vec{p} = \vec{0}) = p^i \Psi(\vec{p} = \vec{0}) = 0$$

Regardons l'action de S_0 sur cet état :

$$\begin{aligned} S_0 \Psi &= \frac{1}{2} \epsilon_{0\nu\rho\sigma} \hat{P}_\nu \hat{J}_{\rho\sigma} \Psi = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \hat{P}_i \hat{J}_{jk} \Psi \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left([\hat{P}_i, \hat{J}_{jk}] + \hat{J}_{jk} \hat{P}_i \right) \Psi \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\text{termes en } g_{ij}, g_{jk} \text{ nuls si } j \neq i \neq k) \\ S_0 \Psi &= 0 \end{aligned}$$

Seule la partie spatiale de l'opérateur de Pauli-Lubanski \vec{S} agit sur le vecteur d'état. Les S_i s'expriment en fonction des composantes spatiales de $\hat{J}_{\mu\nu} = \hat{J}_{\mu\nu}^{(0)} + \hat{J}_{\mu\nu}^{Int}$. Le terme d'interaction est non nul, à la différence de l'approche standard, et peut s'écrire, si le lagrangien d'interaction n'a pas de termes dérivatifs, sous la forme :

$$\hat{J}_{\mu\nu}^{Int} = \int (T_{\rho\mu}^{Int} x_\nu - T_{\rho\nu}^{Int} x_\mu) \omega^\rho \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x = \int \mathcal{H}^{Int}(x) (\omega_\mu x_\nu - \omega_\nu x_\mu) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x$$

Résoudre ces équations est difficile, car il s'agit d'équations dynamiques, c'est-à-dire, comprenant l'interaction. De plus, nous sommes obligés d'effectuer des approximations, en particulier *via* une troncation de l'espace de Fock qui aura pour conséquence la brisure de l'invariance de Poincaré et donc la non-validité des relations de commutation de son algèbre. Or, il existe une façon de remplacer ces équations par des équations cinématiques, à travers ce qu'on appelle la *condition angulaire* [16].

1.4.3 La Condition Angulaire.

Considérons maintenant le paramètre ω comme un quadri-vecteur variable dans un nouvel espace de Fock étendu. Le vecteur d'état dépend de la valeur de ω et s'écrit Ψ_ω . Dans tout calcul où ω est apparent, il faut sous-entendre une intégration sur toutes ses directions. Une rotation infinitésimale de ce 4-vecteur est de la forme :

$$\omega^\mu \longrightarrow \omega'^\mu = \omega^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \omega_\nu$$

Le vecteur d'état se transforme selon la relation :

¹⁹. Tout autre état d'impulsion non nulle peut se ramener à celui-ci par un boost.

$$\begin{aligned}\Psi_{\omega+\delta\omega}(\sigma) &= \Psi_{\omega}(\sigma) + \epsilon^{\mu\nu}\omega_{\nu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\mu}}\Psi_{\omega}(\sigma) \\ \Psi_{\omega+\delta\omega}(\sigma) &= \Psi_{\omega}(\sigma) + \delta\Psi_{\omega}(\sigma) = \Psi_{\omega}(\sigma) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left(\omega_{\mu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\nu}} - \omega_{\nu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\mu}}\right)\Psi_{\omega}(\sigma)\end{aligned}\quad (1.14)$$

D'après Tomonaga et Schwinger [17, 18], pour une telle transformation il est possible d'établir une équation d'évolution en prenant en compte la variation de volume engendrée par la transformation $\delta V(x)$:

$$i\delta\Psi = \mathcal{H}^{int}(x)\Psi\delta V(x)$$

Ici, nous aurons :

$$\delta V(x) = \epsilon^{\mu\nu}x_{\mu}\omega_{\nu}\delta(\omega \cdot x - \sigma)d^4x = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}(x_{\mu}\omega_{\nu} - x_{\nu}\omega_{\mu})\delta(\omega \cdot x - \sigma)d^4x$$

L'équation de Tomonaga et Schwinger correspondante s'écrit donc sous la forme suivante :

$$i\delta\Psi_{\omega} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\int\mathcal{H}^{Int}(x)(x_{\mu}\omega_{\nu} - x_{\nu}\omega_{\mu})\delta(\omega \cdot x - \sigma)d^4x\Psi_{\omega}$$

Nous avons déjà rencontré le deuxième terme auparavant, il s'agit de $J_{\mu\nu}^{Int}$. Cette équation s'exprime maintenant sous la forme simplifiée :

$$i\delta\Psi_{\omega} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}J_{\mu\nu}^{Int}\Psi_{\omega}$$

et partant de l'équation (1.14) :

$$i\left(\omega_{\mu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\nu}} - \omega_{\nu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\mu}}\right)\Psi_{\omega} = J_{\mu\nu}^{Int}\Psi_{\omega}$$

Définissons l'opérateur $\hat{L}_{\mu\nu}(\omega)$ à partir du terme de gauche :

$$\hat{L}_{\mu\nu}(\omega) = i\left(\omega_{\mu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\nu}} - \omega_{\nu}\frac{\partial}{\partial\omega^{\mu}}\right)$$

Nous attendons la *condition angulaire* [16].

$$\hat{L}_{\mu\nu}(\omega)\Psi_{\omega}(p) = J_{\mu\nu}^{Int}\Psi_{\omega}(p) \quad (1.15)$$

1.4.4 Nouveaux opérateurs.

Regardons une autre écriture de $J_{\mu\nu}^{Int}$ et éliminons la dépendance en x en introduisant une transformation de Fourier qui remplace la fonction δ par sa forme intégrale, de façon analogue à la section précédente. Considérons uniquement les états stationnaires en posant $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_{\mu\nu}^{Int} &= \int \mathcal{H}^{Int}(x) (\omega_\mu x_\nu - \omega_\nu x_\mu) \delta(\omega \cdot x - \sigma) d^4x \\
 &= \int \mathcal{H}^{Int}(x) (\omega_\mu x_\nu - \omega_\nu x_\mu) e^{i(\omega \cdot x - \sigma)\tau} d^4x \frac{d\tau}{2\pi} \\
 &= \int \left(\omega_\mu \frac{\partial}{\partial \omega^\nu} - \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \omega^\mu} \right) \mathcal{H}^{Int}(x) e^{i(\omega \cdot x - \sigma)\tau} d^4x \frac{d\tau}{2i\pi\tau} \\
 \hat{J}_{\mu\nu}^{Int} &= \hat{L}_{\mu\nu}(\omega) \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi\tau}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

La condition angulaire (1.15) étant vérifiée, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_\mu \Psi &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}^\nu \hat{J}^{\rho\sigma} \Psi \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}^\nu (\hat{J}_0^{\rho\sigma} + \hat{L}^{\rho\sigma}) \Psi
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Il y a une simple substitution de l'opérateur $\hat{J}_{\mu\nu}^{Int}$ par $\hat{L}_{\mu\nu}$. Ce dernier opérateur ne contient plus l'interaction. Construisons un nouvel opérateur défini par :

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{J}_{\mu\nu}^{(0)} + \hat{L}_{\mu\nu}$$

Cet opérateur vérifie les mêmes relations de commutation que $\hat{J}_{\mu\nu}$, c'est-à-dire qu'il forme avec les \hat{P}^μ l'algèbre de Poincaré. Il s'agit d'un nouveau générateur. Il donc est possible de construire un nouvel opérateur de Casimir. Ceci est fait par l'intermédiaire d'un nouvel opérateur de Pauli-Lubanski \hat{W}_μ dont le carré commute avec tous les générateurs du groupe :

$$\hat{W}_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \hat{P}^\nu \hat{M}^{\rho\sigma} \tag{1.18}$$

La condition angulaire s'exprime maintenant sous une nouvelle forme :

$$\hat{S}_\mu \Psi = \hat{W}_\mu \Psi \tag{1.19}$$

À partir de cette relation, les équations (1.10) et (1.12) se réécrivent sous une forme équivalente :

$$\hat{W}^2 \Psi(p) = -M^2 J(J+1) \Psi(p) \tag{1.20}$$

$$\hat{W}_3 \Psi(p) = M\lambda \Psi(p) \tag{1.21}$$

1.4.5 Opérateur \hat{A}^2 .

Introduisons l'opérateur \hat{A} :

$$\hat{A} = \frac{\hat{W} \cdot \omega}{p \cdot \omega} \quad (1.22)$$

Cet opérateur possède le même nombre d'états propres que \hat{W}_μ , c'est-à-dire, $2J+1$ états propres indexés ici par $a = \{-J, \dots, 0, \dots, J\}$. Son carré \hat{A}^2 commute avec les opérateurs \hat{P}_μ , \hat{W}^2 et \hat{W}_μ et de parité $\hat{\Pi}$. Il s'agit encore d'un opérateur de Casimir, donc tout vecteur d'état est pour lui un état propre avec la valeur propre a^2 :

$$\hat{A}^2 \Psi = a^2 \Psi \quad (1.23)$$

avec $J+1$ états propres indexés par $a = \{0, \dots, J\}$. Ceci pose cependant un problème. En effet, revenons à la condition angulaire (1.19) et appliquons l'opérateur \hat{A}^2 . Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{A}^2 \hat{S}_\mu \Psi &= \hat{A}^2 \hat{W}_\mu \Psi \\ (\hat{S}_\mu \hat{A}^2 + [\hat{A}^2, \hat{S}_\mu]) \Psi &= a^2 \hat{W}_\mu \Psi \\ (a^2 \hat{S}_\mu + [\hat{A}^2, \hat{S}_\mu]) \Psi &= a^2 \hat{S}_\mu \Psi \end{aligned}$$

La condition angulaire n'est remplie que si le commutateur $[\hat{A}^2, \hat{S}_\mu]$ est nul, c'est-à-dire si $J = 0$. Par conséquent, les états propres de \hat{A}^2 ne sont pas des états physiques du système.

Notons Ψ_a les états propres de \hat{A}^2 avec la valeur propre a^2 . Appliquons l'opérateur \hat{S}_3 à cet état. Le vecteur d'état résultant ne peut pas être vecteur propre de \hat{A}^2 , ce qui implique qu'il doit s'exprimer comme une combinaison linéaire des $\Psi_{a'}$:

$$\hat{S}_3 \Psi_a = \sum_{a'} C_{a'} \Psi_{a'}$$

Par contre, \hat{P}^2 commute avec \hat{A}^2 , donc nous pouvons écrire :

$$\hat{P}^2 \Psi_a = M_a^2 \Psi_a$$

Appliquons maintenant à cet état l'opérateur \hat{P}^2 . Nous avons :

$$\hat{P}^2 \hat{S}_3 \Psi_a = \sum_{a'} C_{a'} \hat{P}^2 \Psi_{a'} = C_a M_a^2 \Psi_a + \sum_{a' \neq a} C_{a'} M_{a'}^2 \Psi_{a'}$$

De même, regardons l'expression suivante :

$$\hat{S}_3 \hat{P}^2 \Psi_a = M_a^2 \hat{S}_3 \Psi_a = M_a^2 \sum_{a'} C_{a'} \Psi_{a'}$$

or \hat{P}^2 et \hat{S}_3 commutent, et l'égalité de deux expressions n'est vérifiée que si $M_a^2 = M_{a'}^2$ quelle que soit la valeur de a' . Tous les Ψ_a sont donc dégénérés en masse.

Une solution «physique» pour un moment angulaire donné peut être construite par superposition des différents Ψ_a :

$$\Psi_\lambda = \sum_a C_a \Psi_{\lambda,a} \quad (1.24)$$

Le vecteur d'état ainsi construit doit vérifier l'équation (1.12), ce qui permet en théorie de déterminer les coefficients C_a . Ces relations sont valables uniquement si l'algèbre de Poincaré est parfaitement vérifiée. Ce n'est pas le cas lorsque l'espace de Fock du système est tronqué.

1.5 Quelques propriétés de la LFD.

1.5.1 Analogie avec l'équation de Schrödinger.

Considérons maintenant une translation infinitésimale de $x \rightarrow x' = x + a$. Cette transformation affecte le plan du cône de lumière $\omega \cdot x = \sigma$ qui devient $\omega \cdot x' = \sigma'$. Nous avons : $\sigma' = \sigma + \omega \cdot a$. Le vecteur d'état se transforme selon la loi :

$$\Psi_\omega(\sigma) \rightarrow \Psi'_\omega(\sigma') = U_{P(0)}(a)\Psi_\omega(\sigma)$$

où l'opérateur unitaire $U_{P(0)}(a)$ ne fait intervenir que l'opérateur d'impulsion libre :

$$U_{P(0)}(a) = e^{i\hat{P}^{(0)} \cdot a}$$

Comme nous avons fait pour déterminer la condition angulaire, nous pouvons écrire une équation de Tomonaga-Schwinger à partir de la variation de volume engendrée sous la transformation $\sigma \rightarrow \sigma + \delta\sigma$:

$$i\delta\Psi = \int \mathcal{H}^{Int}(x)\delta(\omega \cdot x - \sigma)d^4x\Psi\delta\sigma$$

Définissons :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \int \mathcal{H}_\omega^{Int}(x)\delta(\omega \cdot x - \sigma)d^4x$$

Ceci nous permet d'obtenir une équation analogue à l'équation de Schrödinger, avec σ comme paramètre d'évolution :

$$i\frac{\partial}{\partial\sigma}\Psi = \mathcal{H}(\sigma)\Psi \tag{1.25}$$

Le paramètre σ est appelé le temps du front de lumière ou *light-front time*. Le vecteur d'état est sur l'hyperplan $\omega \cdot x = \sigma$ et l'hamiltonien est l'opérateur qui régit son évolution entre des plans parallèles à $\sigma_1, \sigma_2, etc.$

1.5.2 Règles diagrammatiques de la LFD.

Il est possible de dériver des règles diagrammatiques pour la LFD. Nous ne donnerons pas de démonstration complète ici²⁰ mais chercherons seulement à expliquer les principales différences avec les règles de Feynmann. Pour cela, partons de l'expression standard de la matrice S suivant la procédure suivie par [19]. Son expression fait intervenir le produit chronologique :

$$\begin{aligned} S &= Texp \left[i \int \mathcal{L}(x) d^4x \right] = Texp \left[-i \int \mathcal{H}^{int}(x) d^4x \right] \\ &= 1 + \sum_n \int (-i)^n \mathcal{H}^{int}(x_1) \theta(t_1 - t_2) \mathcal{H}^{int}(x_2) \dots \theta(t_n - 1 - t_n) \mathcal{H}^{int}(x_n) d^4x_1 \dots d^4x_n \end{aligned}$$

²⁰. Ceci a été fait dans [12].

L'utilisation des fonctions θ permet d'écrire explicitement le produit T . Dans le cadre de la LFD, nous devons nous placer sur le plan $\omega \cdot x = \sigma$ et l'expression de la matrice S a la forme suivante :

$$S = 1 + \sum_n \int (-i)^n \mathcal{H}_\omega^{int}(x_1) \theta(\omega \cdot (x_1 - x_2)) \mathcal{H}_\omega^{int}(x_2) \times \dots \\ \dots \theta(\omega \cdot (x_n - 1 - x_n)) \mathcal{H}_\omega^{int}(x_n) d^4 x_1 \dots d^4 x_n \quad (1.26)$$

Cette expression est maintenant covariante. Les distributions θ peuvent être exprimées sous forme intégrale :

$$\theta(\omega \cdot (x_n - 1 - x_n)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau - i\epsilon} e^{i\tau \omega \cdot (x_n - 1 - x_n)} \quad (1.27)$$

Introduisons aussi la transformée de Fourier de \mathcal{H}_ω^{int} :

$$\tilde{\mathcal{H}}_\omega^{int}(p) = \mathcal{H}_\omega^{int}(x) e^{ip \cdot x} d^4 x$$

et intégrons sur dx pour obtenir une expression différente de S :

$$S = 1 - i\tilde{H}_\omega(0) \\ + \sum_{n>1} (-i)^n \int \tilde{\mathcal{H}}_\omega^{int}(-\omega\tau_1) \frac{d\tau_1}{2\pi i(\tau_1 - i\epsilon)} \tilde{\mathcal{H}}_\omega^{int}(\omega\tau_2 - \omega\tau_1) \dots \frac{d\tau_{n-1}}{2\pi i(\tau_{n-1} - i\epsilon)} \tilde{\mathcal{H}}_\omega^{int}(\omega\tau_{n-1})$$

Les règles diagrammatiques viennent de la représentation formelle de cette dernière équation. Dans le cas d'un champ scalaire dont l'hamiltonien d'interaction est donné par $\mathcal{H}^{int} = -g\phi^3(x)$, il est possible de construire directement $\tilde{\mathcal{H}}_\omega^{int}(\omega\tau)$ en partant de l'expression du champ :

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [a(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\vec{k}) e^{ik \cdot x}] \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2\varepsilon_k}}$$

où a, a^\dagger sont les opérateurs usuels de création et d'annihilation²¹ et $\varepsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. En utilisant la propriété²² :

$$\frac{d^3 \vec{k}}{2\varepsilon_k} = \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) d^4 k$$

il est possible alors d'écrire la transformée de Fourier des champs sous la forme suivante :

$$\tilde{\phi}(k) = \sqrt{2\varepsilon_k} \delta(k^2 - m^2) [a(-\vec{k}) \theta(-k_0) + a^\dagger(\vec{k}) \theta(k_0)] \quad (1.28)$$

Le facteur $\delta(k^2 - m^2)$ est très important. Il apparaît explicitement dans le propagateur de la particule et implique que celle-ci est sur couche de masse. Il s'agit d'une caractéristique très importante de la LFD : *Toutes les particules sont sur couche de masse.*

21. Leurs commutateurs sont :

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

22. En effet

$$\delta(k^2 - m^2) d^4 k = \delta(k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2)) d^4 k = \frac{\delta(k_0 \pm \varepsilon_k)}{|\frac{d(k_0 \pm \varepsilon_k)}{dk_0}|} dk_0 d^3 k$$

En fixant $k_0 > 0$, nous trouvons :

$$\Theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) d^4 k = \frac{\delta(k_0 - \varepsilon_k)}{2k_0} dk_0 d^3 k = \frac{d^3 k}{2\varepsilon_k}$$

1.5.3 Lois de conservation du quadri-moment des constituants.

Si nous effectuons simultanément une translation infinitésimale des coordonnées et du plan de la LFD, nous aurons la transformation suivante du vecteur d'état :

$$\Psi_\omega(\sigma) \rightarrow \Psi'_\omega(\sigma) = (1 + i\hat{P} \cdot a) \Psi_\omega(\sigma)$$

Comme le vecteur d'état est un vecteur propre de l'opérateur d'impulsion \hat{P}_μ , avec la valeur propre p_μ et que :

$$U_{P^{(0)}}(a) = e^{i\hat{P}^{(0)} \cdot a}$$

nous pouvons écrire la relation suivante :

$$e^{i\hat{P}^{(0)} \cdot a} \Psi(\sigma) = e^{ip \cdot a} \Psi(\sigma + \omega \cdot a) \quad (1.29)$$

Cette équation détermine la loi de conservation pour les 4-impulsions des constituants [12]. Illustrons comment ces règles de conservation des moments se déduisent lorsque nous traitons le cas d'un champ scalaire. Considérons pour cela une décomposition très générale du vecteur d'état sur l'espace de Fock :

$$\begin{aligned} |\Psi(\sigma)\rangle &= |0\rangle + \int \Psi_1(k_1, \omega\tau) e^{i\sigma\tau} a^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle d\tau d^4 k_1 \\ &+ \int \Psi_2(k_1, \omega\tau) e^{i\sigma\tau} a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle d\tau d^4 k_1 d\tau d^4 k_2 + \dots \end{aligned}$$

où a^\dagger est l'opérateur de création habituel pour une particule sans spin.

Appliquons à ce terme l'opérateur $e^{i\hat{P}^{(0)} \cdot a}$. L'opérateur d'impulsion libre s'écrit ici sous la forme :

$$\hat{P}_\mu^{(0)} = \int k_\mu (a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k})) d^3 k$$

D'après les règles de commutation des opérateurs de création et d'annihilation, il agit sur une composante de Fock de la façon suivante :

$$\hat{P}_\mu^{(0)} |\Psi_N\rangle = (k_1 + \dots + k_N)_\mu |\Psi_N\rangle$$

Par conséquent, le terme de droite de l'équation (1.29) s'exprime, pour une composante de Fock, par la relation :

$$e^{i\hat{P}^{(0)} \cdot a} |\Psi(\sigma)_N\rangle = e^{i(k_1 + \dots + k_N) \cdot a} |\Psi(\sigma)_N\rangle$$

Le terme de droite s'écrit alors sous la forme :

$$e^{ip \cdot a} |\Psi(\sigma + \omega \cdot a)_N\rangle = e^{ip \cdot a} e^{i\omega \cdot a\tau} |\Psi(\sigma)_N\rangle$$

L'égalité conduit donc à la loi de conservation :

$$k_1 + \dots + k_N = p + \omega\tau \quad (1.30)$$

Cette loi de conservation présente une différence notoire avec les lois habituelles de conservation des impulsions. Ici, nous avons l'apparition d'une impulsion $\omega\tau$ qui rend le

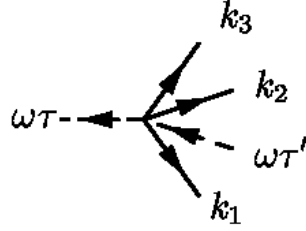


FIG. 1.3 – *Vertex de vide.*

système hors-couche. Cette impulsion s'interprète comme provenant d'une particule fictive nommée *spurion*. Dans les règles diagrammatiques de la LFD²³, dérivées dans [12], cette particule fictive joue un rôle important et est représentée par une ligne discontinue, les autres particules étant représentées par des lignes continues.

Une des conséquences principales de cette règle de conservation est l'interdiction des vertex de vide. En effet, les diagrammes couplant le vide aux états de matière, par exemple celui représenté dans la figure (1.3), sont interdits par la loi de conservation.

En effet, la loi de conservation impose $k_1 + k_2 + k_3 = \omega(\tau - \tau')$. Or il suffit de prendre le carré de cette expression et utiliser le fait que $\omega^2 = 0$ pour trouver $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 0$, relation qui est impossible à vérifier car toutes les particules sont sur couche de masse et $(k_1 + k_2 + k_3)^2$ doit être strictement plus grand que zéro.

Il s'agit d'une des plus importantes propriétés de cette forme dynamique et qui justifie son intérêt. En effet, les états de matière sont découplés du vide de la théorie. Le vide de la LFD est donc «vide», expression qui se traduit joliment en anglais par *the emptiness of the vacuum*.

1.6 Décomposition du vecteur d'état sur un espace de Fock.

La résolution exacte des équations de la LFD étant pour l'instant hors d'atteinte, nous devons donc nous contenter de différentes approximations plus ou moins fortes. La principale approximation dans ce type d'approche est de ne garder en considération, parmi tous les processus possibles, qu'une restriction à certaines classes de diagrammes, donc de tronquer l'espace de Fock du système. Cette troncation implique qu'au lieu d'opérateurs nous devons considérer des matrices finies, ce qui a comme conséquence une violation des relations de commutation de l'algèbre de Poincaré.

1.6.1 Décomposition du vecteur d'état en composantes de Fock dans le cas scalaire

Considérons le cas de deux champs scalaires réels massifs²⁴ ϕ et χ , de masses m et μ , dont les opérateurs de création et d'annihilation sont respectivement a^\dagger, a et b^\dagger, b .

23. Ces règles sont données sans démonstration dans l'annexe I.

24. Cette décomposition est facilement généralisable dans le cas fermionique.

CHAPITRE 1. BASES DU FORMALISME DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE SUR LE FRONT DE LUMIÈRE

Le vecteur d'état du système pourra se décomposer sur le front de lumière sur la base des opérateurs de création et d'annihilation. En utilisant la loi de conservation des impulsions, nous pouvons écrire une expression générale de la décomposition sur l'espace de Fock :

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= |0\rangle + (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{10}(k_1, \omega\tau) a^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} \\
&+ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{01}(k_1, \omega\tau) b^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} \\
&+ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{11}(k_1, k_2, p, \omega\tau) a^\dagger(\vec{k}_1) b^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \delta^4(k_1 + k_2 - p - \omega\tau) 2(\omega \cdot p) \\
&\quad \times d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_2}}} \\
&+ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{20}(k_1, k_2, p, \omega\tau) a^\dagger(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \delta^4(k_1 + k_2 - p - \omega\tau) 2(\omega \cdot p) \\
&\quad \times d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} d\tau \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_2}}} \\
&+ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{02}(k_1, k_2, p, \omega\tau) b^\dagger(\vec{k}_1) b^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle \delta^4(k_1 + k_2 - p - \omega\tau) 2(\omega \cdot p) \\
&\quad \times d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} d\tau \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_2}}} \\
&+ \dots \\
&+ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \int \Psi_{mn}(k_1, \dots, k_{m+n}, p, \omega\tau) \overbrace{a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_m)}^{m \text{ fois}} \overbrace{b^\dagger(\vec{k}_{m+1}) \dots b^\dagger(\vec{k}_{m+n})}^{n \text{ fois}} |0\rangle \\
&\quad \times \delta^4(k_1 + \dots + k_{m+n} - p - \omega\tau) 2(\omega \cdot p) d\tau \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_1}}} \dots \frac{d^3 k_{m+n}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\varepsilon_{k_{m+n}}}} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{1.31}$$

avec $\varepsilon_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ pour une particule ϕ et $\varepsilon_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$ pour une particule χ . Les opérateurs de création et d'annihilation obéissent aux règles de commutation habituelles :

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad ; \quad idem. \text{ pour } b$$

Cette décomposition s'appuie sur la loi de conservation des quadri-impulsions, elle-même obtenue en utilisant le fait que le vecteur d'état est vecteur propre de l'opérateur \hat{P}_μ . Elle obéit, par construction, à l'équation (1.11)

Rappelons que l'élément d'intégration $\frac{d^3 k}{\sqrt{2\varepsilon_k}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^3 k}{\sqrt{2\varepsilon_k}} = \delta(k^2 - m^2) \sqrt{2\varepsilon_k} \Theta(k_0) d^4 k$$

ce qui implique que toutes les 4-impulsions sont sur la couche de masse $k_i^2 = m_i^2$, où $m_i = m$ ou μ selon le cas, et $p^2 = M^2$. Le vecteur d'état doit obéir à la relation (1.13), montrée ici :

$$(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2) \Psi(p) = 2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \Psi(p)$$

1.6. DÉCOMPOSITION DU VECTEUR D'ÉTAT SUR UN ESPACE DE FOCK.

En effet, l'opérateur libre :

$$\hat{P}_\mu^{(0)} = \int k_\mu \left(a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) \right) d^3 k$$

agit²⁵ sur un état à $m + n$ particules : $|\Phi\rangle \sim \left(\overbrace{a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_m)}^{m \text{ fois}} \overbrace{b^\dagger(\vec{k}_{m+1}) \dots b^\dagger(\vec{k}_{m+n})}^{n \text{ fois}} \right) |0\rangle$

en le multipliant par la somme des impulsions :

$$P_\mu^{(0)} |\Phi_{m+n}\rangle = (k_\mu^1 + \dots + k_\mu^{m+n}) |\Phi_{m+n}\rangle$$

Le terme de gauche de l'équation (1.13) donne, pour une composante à un nombre N de particules :

$$(M^2 + \hat{P}_{(0)}^2) |\Phi_N\rangle = \left[M^2 + \left(\sum k_i \right)^2 \right] |\Phi_N\rangle \quad (1.13)$$

Or $(\sum k_i)^2 = (p + \omega\tau)^2 = M^2 + 2(\omega \cdot p)\tau$, donc le terme de gauche a comme seul effet de multiplier le vecteur d'état par un facteur $-2(\omega \cdot p)\tau$. Comme $\hat{P}^{(0)} \cdot \omega$ et \mathcal{H}^{Int} commutent, le terme de droite multiplie chaque composante Φ_N du vecteur d'état par :

$$2 \sum k_\mu^i \omega^\mu \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi} = 2(\omega \cdot p) \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi}$$

Si l'équation (1.13) est satisfaite, il suit que l'opérateur $\int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi}$ n'agit qu'en multipliant toutes les composantes du vecteur d'état par $-\tau$.

1.6.2 Équations pour une composante de Fock

L'équation (1.13) s'écrit donc sous la forme :

$$-2(\omega \cdot p)\tau \Psi(p) = 2(\omega \cdot p) \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi} \Psi(p)$$

En introduisant la fonction de vertex :

$$\hat{\Gamma}(p) = 2(\omega \cdot p)\tau \Psi(p)$$

nous avons l'équation :

$$\hat{\Gamma}(p) = - \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi\tau} \hat{\Gamma}(p) \quad (1.32)$$

qui s'exprime schématiquement sur la base de Fock par :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{10} \\ \Gamma_{01} \\ \Gamma_{11} \\ \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} = - \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi\tau} \begin{pmatrix} \Gamma_{10} \\ \Gamma_{01} \\ \Gamma_{11} \\ \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \\ \Gamma_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

25. Par les lois de commutation des opérateurs de création et d'annihilation.

La composante Γ_{00} qui correspondrait au vide de la théorie n'apparaît pas dans la décomposition, car nous avons vu que dans la LFD cet état ne se couple à aucun autre état. Toute résolution complète étant impossible directement (mis à part les calculs sur réseau), cette équation est réduite par une troncation de l'espace de Fock. Il est intéressant de remarquer que le développement de l'équation (1.33) se fait sur les composantes de l'espace de Fock et qu'il s'agit donc d'une équation non perturbative –dans le sens de la constante de couplage. L'approximation *ladder* est obtenue, par exemple, par la restriction de cette équation à deux et trois particules :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \end{pmatrix} = - \int \mathcal{H}^{Int} \frac{d\tau}{2\pi\tau} \begin{pmatrix} \Gamma_{20} \\ \Gamma_{21} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

1.6.3 Conséquences de la troncation de l'espace de Fock.

La troncation de l'espace de Fock a pour conséquence de détruire l'algèbre de Poincaré. Mathématiquement, ceci vient du fait que des opérateurs sont changés dans des matrices finies, mais il y a une interprétation physique immédiate : dans un système relativiste le nombre de particules ne peut pas être fixé.

Une troncation de l'espace de Fock a donc des conséquences importantes. Dans la section 1.4.5, par exemple, nous avons montré que les états propres Ψ_a de l'opérateur \hat{A}^2 sont dégénérés en masse. Or cette propriété n'est valable que si les règles de commutation sont vérifiées, ce qui n'est plus le cas sur un espace de Fock tronqué. Sur cet espace tronqué, chaque état propre de \hat{A}^2 a une masse propre M_a différente des autres. Le vecteur d'état «physique» défini par l'équation (1.24) n'obéit plus aux équations de la LFD et le système n'a formellement pas de solution. Il existe néanmoins une façon de sortir de l'impasse. Elle consiste à considérer que la masse physique résulte d'une moyenne des masses non physiques M_a :

$$M^2 = \sum_a |C_a|^2 M_a^2$$

Ce problème a été traité en détail par Mangin-Brinet, Carbonell et Karmanov dans [20, 21].

1.6.4 Dernières remarques.

Dans ce chapitre nous avons introduit les concepts de base de la dynamique hamiltonienne sur le front de lumière, selon une formulation explicitement covariante. Ce formalisme possède quelques grands avantages par rapport aux autres formes dynamiques, ne serait-ce que par sa formulation covariante. Nous avons vu deux autres propriétés importantes. La première est que cette forme hamiltonienne est celle qui minimise le nombre de générateurs dynamiques, c'est-à-dire comprenant l'interaction. La seconde est le fait que dans cette théorie le vide ne se couple à aucun autre état, ce qui simplifie très fortement les calculs, car il n'y a pas de fluctuations du vide à prendre en compte et que dans le cadre d'un développement perturbatif, seuls les diagrammes connexes sont à considérer. Il existe un point important qui n'a pas été traité ici. Il s'agit des propriétés de cette forme hamiltonienne vis-à-vis de la renormalisation pour un secteur de Fock donné [22, 23].

Nous avons dérivé dans ce chapitre les équations régissant le système par des considérations simples sur les générateurs du groupe de Poincaré. Nous avons aussi introduit

1.6. DÉCOMPOSITION DU VECTEUR D'ÉTAT SUR UN ESPACE DE FOCK.

une condition supplémentaire, la *condition angulaire*, permettant de réduire au maximum le nombre d'équations dynamiques. Ces équations vont, par la suite, être appliquées à des systèmes à deux corps, par une troncation de l'espace de Fock.

Chapitre 2

Mécanique quantique non relativiste dans l'espace des moments

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques développements de la mécanique quantique non relativiste dans l'espace des moments (impulsions). Travailler dans l'espace des moments va nous permettre de faciliter le passage vers une approche relativiste de la mécanique quantique, avec le formalisme dans le cône de lumière. La procédure suivie dans ce chapitre permet de trouver les énergies de liaison et les fonctions d'onde pour les états liés d'un système à deux particules, ainsi que les déphasages dans le cas de la diffusion. Elle servira de base à la démarche que nous allons suivre pour le traitement des systèmes relativistes à deux corps dans le cadre de la LFD.

En mécanique quantique nous avons toute liberté de choisir la base sur laquelle nous allons projeter les différents opérateurs. Historiquement, la mécanique quantique a été d'abord développée dans l'espace des configurations, sur la base des $\{|\vec{r}\rangle\}$, vecteurs propres de l'opérateur position \hat{R} . Or toute autre base complète de l'espace des configurations est possible, en particulier la base des vecteurs $\{|\vec{p}\rangle\}$ propres de l'opérateur impulsion \hat{P} .

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux états stationnaires d'un système à deux particules. En fonction de l'énergie du système, les deux particules peuvent être liées ou non. Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux deux cas possibles : les états liés et les états de diffusion du système.

2.1 Équation de Schrödinger stationnaire dans l'espace des moments.

Considérons¹ deux particules sans spin de masses m_1 et m_2 . Comme dans le cadre de la mécanique classique, l'étude de ces deux particules en interaction peut être ramené à l'étude d'une particule *réduite* de masse M telle que $\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$. Dans ce cas, le problème se réduit à l'étude d'une particule sans spin soumise à un potentiel V . La particule sans interaction est soumise à l'hamiltonien libre $\mathcal{H}_0 = \frac{\vec{P}^2}{2M}$. L'hamiltonien du système est donné par $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$. Écrivons l'équation de Schrödinger stationnaire correspondante :

1. Pour rappel, $\hbar = c = 1$.

$$E |\Psi\rangle = \mathcal{H} |\Psi\rangle = (\mathcal{H}_0 + V) |\Psi\rangle \quad (2.1)$$

Choisissons une représentation particulière pour cette équation. Nous prendrons comme base les états propres de l'opérateur impulsion \hat{P} . Ils sont notés $|\vec{p}\rangle$ et normalisés selon la relation² :

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$$

Ces états sont états propres de l'hamiltonien libre :

$$\mathcal{H}_0 |\vec{p}\rangle = \frac{\vec{p}^2}{2M} |\vec{p}\rangle$$

Notons la projection d'un vecteur d'états $|\Psi\rangle$ sur cette base sous la forme $\langle \vec{p} | \Psi \rangle = \Psi(\vec{p})$ et projetons l'équation (2.1) sur le bra $\langle \vec{p} |$:

$$E \Psi(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2M} \Psi(\vec{p}) + \langle \vec{p} | V | \Psi \rangle$$

En utilisant la relation de fermeture $\int d^3 \vec{p}' |\vec{p}'\rangle \langle \vec{p}'| = 1$, le dernier terme peut s'écrire sous la forme :

$$\langle \vec{p} | V | \Psi \rangle = \int d^3 \vec{p}' \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \Psi \rangle$$

En notant $V(\vec{p}, \vec{p}') = \langle \vec{p} | V | \vec{p}' \rangle$ et $E_p = \frac{\vec{p}^2}{2M}$, l'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit alors, dans l'espace des impulsions, sous la forme suivante :

$$(E - E_p) \Psi(\vec{p}) = \int d^3 \vec{p}' V(\vec{p}, \vec{p}') \Psi(\vec{p}') \quad (2.2)$$

Cette équation est une équation intégrale. Elle n'a de sens que si l'intégrale du terme de gauche converge, donc si le potentiel est suffisamment décroissant pour des grandes impulsions.

2.2 Calcul des états liés.

Les états liés sont des états stationnaires, qui doivent obéir à cette équation. Pour un état lié, nous aurons la masse totale du système inférieure à la somme des masses des constituants. L'énergie de liaison est négative $E < 0$. La résolution de l'équation (2.2) permet d'obtenir un ensemble d'états propres discrets, définis par l'énergie propre E_i .

Pour une plus grande analogie avec les états de diffusion, réécrivons l'équation de Schrödinger sous une autre forme. Introduisons pour cela la fonction de vertex :

$$\Gamma(\vec{p}) = (E - E_p) \Psi(\vec{p}) \quad (2.3)$$

2. Nous fixerons aussi $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}$. Ce choix fixe la normalisation de la transformée de Fourier :

$$\tilde{F}(\vec{p}) = TF(f) = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}$$

Pour les états liés, l'énergie E est négative et le facteur $(E - E_p)$ ne s'annule pas. Il est alors possible d'écrire l'équation (2.2) sous la forme suivante :

$$\Gamma(\vec{p}) = \int d^3\vec{p}' V(\vec{p}, \vec{p}') \frac{1}{(E - E_{p'})} \Gamma(\vec{p}') \quad (2.4)$$

Nous pouvons faire apparaître un opérateur G_0 nommé le *propagateur libre*, tel que $G_0 |\vec{p}\rangle = \frac{1}{(E - E_p)} |\vec{p}\rangle$; nous avons alors une équation de la forme :

$$|\Gamma\rangle = V G_0 |\Gamma\rangle$$

Cette équation est une équation dite *de Lippmann-Schwinger* pour les états liés.

2.2.1 Décomposition angulaire.

Une résolution complète de l'équation pour les états liés permet d'obtenir un ensemble d'états propres $|\Gamma_i\rangle$ avec l'énergie propre E_i . Il est possible d'extraire, parmi ces solutions, les états propres de l'opérateur de moment cinétique. Il est possible aussi de résoudre l'équation (2.4) pour un moment angulaire donné. Pour cela, nous allons effectuer une décomposition angulaire des solutions recherchées sur une base d'harmoniques sphériques³ :

$$\Gamma(\vec{p}) = \sum_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{p}) \Gamma_{lm}(p)$$

L'équation (2.4) s'exprime alors par :

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{p}) \Gamma_{lm}(p) = \int d^3\vec{p}' V(\vec{p}, \vec{p}') \frac{1}{(E - E_{p'})} \sum_{l'm'} Y_{l'm'}(\hat{p}') \Gamma_{l'm'}(p')$$

Multiplions cette relation par $Y_{lm}^*(\hat{p})$ et intégrons sur $d\hat{p}$. L'équation s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\Gamma_{lm}(p) = \sum_{l'm'} \int p'^2 dp' V_{lm,l'm'}(p, p') \frac{1}{(E - E_{p'})} \Gamma_{l'm'}(p') \quad (2.5)$$

avec

$$V_{lm,l'm'}(p, p') = \int d\hat{p} d\hat{p}' Y_{lm}^*(\hat{p}) V(\vec{p}, \vec{p}') Y_{l'm'}(\hat{p}') \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) est très générale, la décomposition étant valable pour n'importe quel potentiel $V(\vec{p}, \vec{p}')$. Or très souvent nous avons affaire à des potentiels plus simples. Considérons par exemple le cas où le potentiel ne dépend que des scalaires p, p' et du produit scalaire $\hat{p} \cdot \hat{p}'$. Il peut alors se décomposer sur une base de polynômes de Legendre :

$$V(p, p', u) = \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) P_{\lambda}(\hat{p} \cdot \hat{p}') V_{\lambda}(p, p')$$

3. Les harmoniques sphériques sont normalisés selon la relation suivante :

$$\int d\hat{k} Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

avec $d\hat{k} = \sin\theta d\theta d\varphi$, pour un vecteur unitaire \hat{k} paramétré par les angles θ et φ , avec $\cos\theta = \hat{k} \cdot \hat{z}$ et φ l'angle entre \hat{x} la projection de \hat{k} sur le plan xoy

En utilisant la relation suivante entre les polynômes de Legendre et les harmoniques sphériques :

$$P_\lambda(u) = \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{4\pi}{2\lambda+1} Y_{\lambda\mu}(\hat{p}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{p}')$$

le potentiel décomposé $V_{lm,l'm'}(p, p')$ s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_{lm,l'm'}(p, p') &= 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \int d\hat{p} d\hat{p}' Y_{lm}^*(\hat{p}) Y_{\lambda\mu}(\hat{p}) V_{\lambda}(p, p') Y_{\lambda\mu}^*(\hat{p}') Y_{l'm'}(\hat{p}') \\ &= 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \delta_{l\lambda} \delta_{m\mu} \delta_{\lambda l'} \delta_{\mu m'} V_{\lambda}(p, p') \\ V_{lm,l'm'}(p, p') &= 4\pi \delta_{mm'} \delta_{ll'} V_l(p, p') \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'équation (2.5) peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\Gamma_{lm}(p) = 4\pi \int p'^2 dp' V_l(p, p') \frac{1}{(E - E_{p'})} \Gamma_{lm}(p')$$

Dans ce cas, les solutions pour un m donné sont découplées et la résolution de l'équation conduit à trouver, pour un l donné, $2l+1$ solutions dégénérées. Nous verrons par la suite que les potentiels relativistes que nous obtenons brisent cette dégénérescence des solutions.

2.3 États de diffusion à deux corps.

Pour aborder les problèmes de diffusion⁴, considérons un modèle d'expérience simple dans lequel un faisceau de particules de même masse et homogènes en impulsion est envoyé sur une cible au repos dans le référentiel du laboratoire. Un détecteur est placé en aval de cette cible. Il détecte les particules diffusées arrivant sur l'élément d'angle solide correspondant à la surface de détection. Le flux des particules détectées doit dépendre du flux F_i des particules incidentes. Notons dn le nombre de particules diffusées dans un élément d'angle solide $d\Omega$, par unités de temps et unités de flux incident F_i :

$$dn = F_i \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

Le coefficient de proportionnalité $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ est nommé la *section efficace différentielle*. Le but d'une théorie de la diffusion consiste donc à prédire la valeur de cette quantité. Comment donc établir un lien entre la section efficace et les équations fondamentales, telle que l'équation de Schrödinger ?

Deux façons différentes mais équivalentes de le faire ont été développées historiquement. Une première approche consiste à relier la section efficace différentielle aux éléments de matrice de l'*opérateur d'évolution* du système $U(t)$ lorsque t tend vers l'infini⁵.

4. Nous suivons ici les conventions définies par Glöckle dans [24]. D'autres ouvrages utiles sont [25, 26, 27].

5. Les solutions générales de l'équation de Schrödinger dépendante du temps peuvent s'exprimer en introduisant ce qu'on nomme l'*opérateur d'évolution* $U(t)$, reliant une solution $|\Psi\rangle$ de l'équation à un

La seconde approche consiste à relier les sections efficaces au comportement asymptotique des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Nous choisirons cette approche pour dériver des équations de la diffusion.

Considérons le problème suivant : une onde plane incidente arrive sur un centre diffuseur. Le raisonnement physique consiste à supposer que loin du centre diffuseur, l'onde diffusée est constituée d'une composante de l'onde incidente qui n'a pas été perturbée (l'onde plane e^{ikx}), ainsi qu'une onde sphérique, définie à un facteur $f(\vec{k}, \vec{p})$ nommé *amplitude de diffusion* :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\vec{x}) \sim e^{ikx} + \frac{1}{r} f(\vec{k}, \vec{p}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (2.7)$$

Le calcul du flux de probabilité associé à l'onde diffusée permet d'obtenir un lien entre l'amplitude de diffusion et la section efficace :

$$\frac{d\sigma(\vec{k}, \vec{p})}{d\Omega} = |f(\vec{k}, \vec{p})|^2 \quad (2.8)$$

Pour obtenir une équation régissant les états stationnaires de diffusion, il est possible de considérer qu'une fonction d'onde de type (2.7) est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire. Plaçons-nous en représentation \hat{P} . La transformée de Fourier de cette expression est de la forme suivante :

$$\Psi(\vec{k}, \vec{p}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) + \chi(\vec{k}, \vec{p}) \quad (2.9)$$

Le premier terme correspond à la composante non modifiée de l'onde plane incidente, le second terme à l'onde diffusée. Pour que cette solution soit valable, l'équation de Schrödinger se transforme dans une équation intégrale inhomogène :

$$(E - E_p)\chi(\vec{k}, \vec{p}) = V(\vec{k}, \vec{p}) + \int d^3\vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}') \chi(\vec{k}', \vec{p}) \quad (2.10)$$

Nous voulons faire disparaître le facteur $(E - E_p)$ du membre de gauche. Lorsque $E > 0$, ce qui est le cas des états de diffusion, il est nécessaire de fixer un contour d'intégration du pôle $(E - E_p)$. Introduisons la fonction T^\pm définie par la relation :

$$T^\pm(\vec{k}, \vec{p}) = (E - E_p \pm i\epsilon)\chi(\vec{k}, \vec{p})$$

et le propagateur libre G_0^\pm défini par : $G_0^\pm |\vec{p}\rangle = \frac{1}{(E - E_{p'} \pm i\epsilon)} |\vec{p}\rangle$. Nous pouvons alors écrire une équation pour la diffusion de la forme suivante :

$$T^\pm(\vec{k}, \vec{p}) = V(\vec{k}, \vec{p}) + \int d^3\vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}') G_0^\pm T^\pm(\vec{k}', \vec{p}) \quad (2.11)$$

Cette équation est l'équation de Lippmann-Schwinger pour la diffusion.

Comme relier cette équation aux observables physiques ? Voici la démarche que nous allons suivre : Tout d'abord, nous allons introduire l'opérateur de diffusion S , reliant la

instant initial au vecteur d'état $|\Psi_t\rangle$ à n'importe quel temps t par la relation suivante :

$$|\Psi_t\rangle = U(t) |\Psi\rangle = e^{-iHt} |\Psi\rangle$$

où H est l'hamiltonien du système. Cet opérateur est unitaire.

fonction d'onde *avant* la diffusion avec la fonction d'onde *après* la diffusion. Ceci va nous permettre d'établir un lien entre l'approche faisant intervenir l'opérateur d'évolution et l'approche que nous avons choisie. Nous allons ensuite introduire l'opérateur de transition T et une équation qui généralise l'équation (2.11) dérivée de l'équation de Schrödinger. Nous trouverons ensuite le lien entre ces deux opérateurs. L'opérateur de diffusion S va nous permettre, après une décomposition angulaire sur une base d'harmoniques sphériques, d'introduire une quantité paramétrant les processus de diffusion, les *déphasages de diffusion*, pour une onde partielle donnée.

2.3.1 La matrice S ou l'opérateur de diffusion.

Une particule diffusée possède certaines caractéristiques connues, en particulier, de se comporter comme un paquet d'onde libre bien avant l'interaction avec le centre diffuseur, ainsi qu'après la processus. En notant $U^0(t) = e^{-iH_0 t}$ l'opérateur d'évolution libre, $|\Psi_{in}\rangle$ le vecteur d'état décrivant la particule loin avant le centre diffuseur (l'onde incidente) et $|\Psi_{out}\rangle$ le vecteur d'état bien après la diffusion (l'onde diffusée), nous avons la relation suivante :

$$\begin{cases} U(t) |\Psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U^0(t) |\Psi_{in}\rangle \\ U(t) |\Psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} U^0(t) |\Psi_{out}\rangle \end{cases}$$

Ces conditions sont renforcées en imposant l'annulation des différences entre les fonctions d'onde, par exemple par la relation suivante :

$$\left| U(t) |\Psi\rangle - U^0(t) |\Psi_{in/out}\rangle \right| \xrightarrow{t \rightarrow \mp\infty} 0$$

L'unitarité de l'opérateur d'évolution nous permet alors d'écrire :

$$\begin{cases} |\Psi\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} U^\dagger(t) U^0(t) |\Psi_{in}\rangle \equiv \Omega_+ |\Psi_{in}\rangle \\ |\Psi\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} U^\dagger(t) U^0(t) |\Psi_{out}\rangle \equiv \Omega_- |\Psi_{out}\rangle \end{cases}$$

Ce qui nous permet de définir des nouveaux opérateurs, les *opérateurs d'onde de Møller* :

$$\Omega_\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U^\dagger(t) U^0(t) \quad (2.12)$$

Ces opérateurs sont isométriques⁶. Cette propriété permet d'inverser la relation et d'obtenir un lien entre l'onde incidente et l'onde diffusée :

$$|\Psi_{out}\rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\Psi_{in}\rangle = S |\Psi_{in}\rangle \quad (2.13)$$

6. Un opérateur isométrique Ω est un opérateur linéaire défini dans tout l'espace d'Hilbert \mathcal{H} et préservant la norme. Le domaine $\mathcal{D}(\Omega)$ où Ω est défini est :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{H}$$

et la norme est conservée :

$$\forall |\Psi\rangle, \|\Omega\Psi\| = \|\Psi\|$$

Généralement, le rang $\mathcal{R}(\Omega) \neq \mathcal{H}$. Si le rang de Ω est \mathcal{H} on parle alors d'un opérateur unitaire.

La conservation de la norme implique que $\Omega|\Psi\rangle \neq 0$ si $|\Psi\rangle \neq 0$, et donc l'existence d'un opérateur inverse Ω^{-1} . Pour les opérateurs isométriques, Ω^{-1} n'est pas défini dans la totalité de \mathcal{H} .

$$\|\Omega\Psi\| = \|\Psi\| \implies \langle \Psi | \Omega^\dagger \Omega | \Psi \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle$$

Il suit que $\Omega^\dagger \Omega = 1$ mais généralement $\Omega \Omega^\dagger \neq 1$, sauf pour les opérateurs unitaires.

Nous définissons ainsi l'opérateur de diffusion –ou matrice S – par :

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+ \quad (2.14)$$

Cet opérateur est unitaire. Pour le prouver, il faut considérer l'isométrie des opérateurs de Møller. Ω_+ est en effet une application linéaire de \mathcal{H} en \mathcal{R} qui préserve la norme, de même que Ω_-^\dagger qui passe de \mathcal{R} à \mathcal{H} . L'opérateur S est donc un opérateur linéaire de \mathcal{H} en \mathcal{H} qui préserve la norme, c'est-à-dire unitaire.

Forme explicite de la matrice S .

Utilisons maintenant la définition des opérateurs d'évolution :

$$U(t) |\Psi\rangle = e^{-iHt} |\Psi\rangle$$

pour écrire plus explicitement l'opérateur de diffusion S . Partons de l'hamiltonien du système $H = H_0 + V$, qui se décompose dans une partie libre telle que :

$$e^{iH_0 t} |\vec{p}\rangle = e^{iE_p t} |\vec{p}\rangle$$

et un potentiel V . Écrivons maintenant la matrice S de façon plus explicite, par exemple un élément de matrice $\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle$. Ceci correspond à une particule incidente d'impulsion \vec{p} sortant avec une impulsion \vec{p}' . Partons de la définition de $S = \Omega_-^\dagger \Omega_+$ pour écrire :

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \vec{p}' | e^{iH_0 t} e^{-2iHt} e^{iH_0 t} | \vec{p} \rangle \quad (2.15)$$

Calculons l'expression centrale en prenant sa dérivée en t et en l'intégrant ensuite sur cette même variable. La dérivée sera donnée par :

$$\frac{d}{dt} [e^{iH_0 t} e^{-2iHt} e^{iH_0 t}] = -i \{ e^{iH_0 t} V e^{-2iHt} e^{iH_0 t} + e^{iH_0 t} e^{-2iHt} V e^{iH_0 t} \}$$

L'intégration sur t va introduire un terme diagonal $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle$, correspondant à la valeur à $t = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle &= \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle - i \int_0^\infty dt \langle \vec{p}' | \{ e^{iH_0 t} V e^{-2iHt} e^{iH_0 t} + e^{iH_0 t} e^{-2iHt} V e^{iH_0 t} \} | \vec{p} \rangle \\ &= \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - i \int_0^\infty dt \langle \vec{p}' | \{ V e^{i(E_{p'} + E_p - 2H)t} + e^{i(E_{p'} + E_p - 2H)t} V \} | \vec{p} \rangle \\ &= \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \vec{p}' | V \frac{i}{E_{p'} + E_p + i\epsilon - 2H} + \frac{i}{E_{p'} + E_p + i\epsilon - 2H} V \rangle | \vec{p} \rangle \\ &= \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \vec{p}' | \{ V G(\frac{E_{p'} + E_p}{2} + i\epsilon) + G(\frac{E_{p'} + E_p}{2} + i\epsilon) V \} | \vec{p} \rangle \quad (2.16) \end{aligned}$$

où nous avons introduit l'opérateur G défini de manière générale par⁷ :

$$G(z) = (z - H)^{-1}$$

7. L'existence d'un pôle exige de choisir un contour d'intégration dans le plan complexe. Nous introduisons la notation :

$$G^\pm(z) = \frac{1}{z - H \pm i\epsilon}$$

avec $z = \frac{E_{p'} + E_p}{2}$. Cette fonction peut être définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que l'inverse de $(z - H)$ existe. Il s'agit d'un opérateur de Green. Il est possible d'écrire une relation générale entre $G(z)$ et V en introduisant $G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$. Pour cela, nous utilisons l'expression matricielle $A^{-1} = B^{-1} + B^{-1}(B - A)A^{-1}$ pour écrire les relations :

$$\begin{cases} G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z) \\ G(z) = G_0(z) + G(z)VG_0(z) \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3.2 La matrice T ou *opérateur de transition*.

Introduisons maintenant l'opérateur T défini par :

$$T(z) = V + VG(z)V \quad (2.18)$$

À partir de (2.17), nous déduisons que T obéit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} T(z) = V + T(z)G_0(z)V \\ T(z) = V + VG_0(z)T(z) \end{cases} \quad (2.19)$$

Ces équations sont à comparer avec l'équation (2.11) dérivée de l'équation de Schrödinger dans la section précédente. Elles sont connues sous le nom d'*équations de Lippmann-Schwinger pour T* . À la différence de l'équation (2.11), ces équations dépendent ici de la variable z . En utilisant les équations (2.17) et (2.19), il est aisé de montrer que :

$$VG(z) = T(z)G_0(z) \quad \text{et} \quad G(z)V = G_0(z)T(z)$$

Ces expressions nous permettent de réécrire l'équation (2.16) sous la forme suivante :

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \vec{p}' | \{ T(z)G_0^+(z) + G_0^+(z)T(z) \} | \vec{p} \rangle$$

où le propagateur libre est donné par :

$$G_0^+(z) | \vec{p} \rangle = \frac{1}{z - E_p + i\epsilon} | \vec{p} \rangle = PP \left\{ \frac{1}{z - E_p} \right\} | \vec{p} \rangle - i\pi\delta(z - E_p) | \vec{p} \rangle$$

Or dans l'équation (2.16) nous avons $z = \frac{E_p + E_{p'}}{2}$. L'élément de matrice $\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle$ s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - 2i\pi\delta(E_{p'} - E_p) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \vec{p}' | T(E_{p'} + i\epsilon) | \vec{p} \rangle$$

En définissant la matrice de transition, nommée aussi la matrice T *sur couche*, par la relation :

$$t(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \vec{p}' | T(E_{p'} + i\epsilon) | \vec{p} \rangle \quad (2.20)$$

nous obtenons la relation générale :

$$\langle \vec{p}' | S | \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) - 2\pi i\delta(E_{p'} - E_p) t(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) \quad (2.21)$$

Cette expression de la matrice de diffusion est en accord avec les hypothèses de départ. Le premier terme correspond à la composante non diffusée de l'onde incidente. Le second terme correspond à l'onde diffusée, avec la contrainte de la conservation de l'énergie totale avant et après le processus. La matrice de transition contient toute l'information utile sur le processus de diffusion. Par ailleurs, pour que l'expression asymptotique de la fonction d'onde (2.7) soit cohérente avec ce résultat, nous devons supposer que l'amplitude de diffusion $f(\vec{p}', \vec{p})$ est proportionnelle à $t(\vec{p}' \leftarrow \vec{p})$.

2.3.3 Introduction du déphasage.

Il est intéressant de faire disparaître de cette équation la dépendance explicite dans les variables angulaires. Pour cela, cherchons à décomposer angulairement cette équation. Utilisons pour cela les relations suivantes :

$$\delta(E_{p'} - E_p) = \frac{m}{2p} \delta(p' - p) \quad ; \quad \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{p^2} \delta(p' - p) \delta(\hat{p}' - \hat{p})$$

ainsi qu'une décomposition de t sur une base de polynômes de Legendre dans l'équation (2.21) :

$$t(p, \hat{p}, \hat{p}') = \sum_l (2l+1) t_l(p) P_l(\vec{p} \cdot \vec{p}') = 4\pi \sum_{lm} t_l(p, p') Y_{lm}(\hat{p}) Y_{lm}^*(\hat{p}') \quad (2.22)$$

Multiplions la relation obtenue par l'introduction de (2.22) dans (2.21) par p^2 et intégrons sur $\int dp$. Nous obtenons :

$$\langle \hat{p}' | S | \hat{p} \rangle = \delta(\hat{p}' - \hat{p}) - 4i\pi^2 m p \sum_{lm} t_l(p) Y_{lm}^*(\hat{p}) Y_{lm}(\hat{p}') \quad (2.23)$$

Le terme de gauche peut être écrit sous la forme suivante :

$$\langle \hat{p}' | S | \hat{p} \rangle = \langle \hat{p}' | l' m' \rangle \langle l' m' | S | l m \rangle \langle l m | \hat{p} \rangle$$

avec $\langle \hat{p}' | l' m' \rangle = Y_{l'm'}(\hat{p}')$. Lorsque le potentiel est invariant par rotation, la matrice S est diagonale dans la base des $|l m\rangle$:

$$\langle p', l' m' | S | p, l m \rangle = \delta(p - p') \delta_{l'l} \delta_{m'm} s_l(p)$$

Ceci permet d'introduire la fonction $s_l(p)$, définissant la matrice de diffusion pour une onde partielle donnée. L'unitarité de S s'exprime par l'unitarité de chaque onde partielle, ce qui se traduit par l'introduction d'une phase :

$$s_l(p) = e^{2i\delta_l(p)} \quad (2.24)$$

Les $\delta_l(p)$ sont appelés *déphasages*. Les déphasages sont définis pour une onde partielle donnée. Ils paramètrent la différence entre l'onde partielle diffusée et l'onde plane incidente, décrivant l'effet du centre diffuseur. D'après (2.23), les $s_l(p)$ et $t_l(p)$ sont reliés par la relation suivante :

$$s_l(p) = 1 - 4i\pi^2 m p t_l(p) \quad (2.25)$$

Ce qui nous permet de trouver une relation entre les déphasages et la matrice t sur couche :

$$t_l(p) = \frac{-1}{2\pi^2 m} \frac{e^{2i\delta_l(p)} - 1}{2ip}$$

La matrice de transition sur couche est proportionnelle à l'amplitude de diffusion. Définissons-la par la relation suivante :

$$f(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) = -2\pi^2 m t(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) \quad (2.26)$$

Nous retrouvons ainsi le lien connu entre les amplitudes de diffusion et les déphasages :

$$s_l(p) = e^{2i\delta(p)} = 1 + 2ip f_l(p) \quad (2.27)$$

où les $f_l(p)$ proviennent de la décomposition de l'amplitude f dans une base de polynômes de Legendre :

$$f(\vec{p}' \leftarrow \vec{p}) = \sum_l (2l+1) P_l(\hat{p} \cdot \hat{p}') f_l(p)$$

L'unitarité de S induit quelques contraintes sur $f_l(p)$. Partons de l'identité (2.27) pour écrire :

$$1 = 1 + 2ip(f_l(p) - f_l^*(p)) + 4p^2 f_l(p) f_l^*(p)$$

Nous en déduisons la relation :

$$Im(f_l(p)) = 2p |f_l(p)|^2 \quad (2.28)$$

qui n'est rien d'autre qu'une expression du théorème optique pour une onde partielle donnée.

2.3.4 La matrice K ou *matrice de réaction*.

Nous venons d'obtenir un lien entre la matrice t , dont nous connaissons une équation issue de l'équation de Schrödinger la déterminant pleinement, et des quantités physiques pertinentes, comme les déphasages ou la section efficace différentielle. Cependant, l'équation de Lipmann-Schwinger pour la matrice T peut s'avérer malaisée à traiter. En effet, cette équation dépend du contour d'intégration de la singularité de G_0 . Elle peut s'écrire comme deux équations :

$$T^\pm(z) = V + V G_0^\pm(z) T(z) = V + V G_0^{PP}(z) T(z) \mp i\pi \delta(z) V T(z)$$

où $G_0^{PP}(z)$ représente la partie principale de G_0 . Il est possible de définir un opérateur, nommé parfois la *matrice de réaction* ou *matrice réactante* $K = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$, tel que l'équation de Lippmann-Schwinger soit donnée par :

$$K = V + PP(VG_0K) \quad (2.29)$$

ou, explicitement, par la relation :

$$K(\vec{k}, \vec{p}) = V(\vec{k}, \vec{p}) + PP \int d^3 \vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}') G_0 K(\vec{k}', \vec{p}) \quad (2.30)$$

La matrice K est une matrice réelle lorsque le potentiel est réel et ne devient complexe que si le potentiel est complexe. Ceci a quelques avantages, en particulier lorsque nous utiliserons une extension de ce formalisme dans l'étude de la diffusion relativiste. Dans ces cas, nous aurons l'ouverture d'un canal inélastique, ce qui se traduit par une composante imaginaire du noyau.

CHAPITRE 2. MÉCANIQUE QUANTIQUE NON RELATIVISTE DANS L'ESPACE DES MOMENTS

Relions maintenant cette nouvelle matrice aux autres quantités, en particulier aux déphasages. Partons de l'équation (2.29). Cette relation peut s'inverser pour obtenir une équation pour V :

$$V = (1 - VG_0)K = (1 - VG_0^+)K - i\pi V\delta(E_p - E_{p'})K$$

ce qui permet de retrouver une expression reliant K à T :

$$T^+(\vec{p}, \vec{p}') = K(\vec{p}, \vec{p}') - i\pi \int d\vec{q} T^+(\vec{p}, \vec{q})\delta(E_p - E_q)K(\vec{q}, \vec{p}') \quad (2.31)$$

Or $\delta(E_p - E_q) = \frac{m}{2p}\delta(p - q)$. L'intégrale du terme de droite fait apparaître la matrice T sur couche, que nous avons déjà rencontrée :

$$T^+(\vec{p}, \vec{p}') = K(\vec{p}, \vec{p}') - i m p \frac{\pi}{2} \int d\hat{q} T^+(p, \hat{p}, p, \hat{q})K(p, \hat{q}, p')$$

Notons t la matrice T sur couche, k la matrice K sur couche. Nous traiterons désormais l'équation sur couche d'énergie. La matrice k ne dépend que des scalaires p^2 et $\hat{p} \cdot \hat{p}'$. La décomposition angulaire peut être faite sur une base de polynômes de Legendre de façon semblable à celle effectuée pour la matrice t :

$$k(p, \hat{p}, \hat{p}') = \sum_l (2l+1)k_l(p)P_l(\hat{p} \cdot \hat{p}') = 4\pi \sum_{lm} k_l(p)Y_{lm}(\hat{p})Y_{lm}^*(\hat{p}')$$

En multipliant l'équation par $Y_{lm}^*(\hat{p})Y_{lm}(\hat{p}')$ et en intégrant sur $d\hat{p}d\hat{p}'$ nous obtenons la relation suivante :

$$t_l(p) = k_l(p) - 2i\pi^2 p m t_l(p)k_l(p) \quad (2.32)$$

En utilisant la relation (2.25) nous trouvons un lien entre la matrice K sur couche et la matrice S :

$$s_l(p) = \frac{1 - 2i\pi^2 p m k_l(p)}{1 + 2i\pi^2 p m k_l(p)}$$

d'où le déphasage en fonction de $k_l(p)$ est donné par la relation :

$$\tan \delta_l(p) = -2\pi^2 m p k_l(p) \quad (2.33)$$

Par la suite, nous allons travailler exclusivement avec la matrice K . Cette relation nous sera donc de grande utilité. Revenons maintenant sur l'équation (2.30), l'équation de Lippmann-Schwinger pour la matrice K :

$$K(\vec{k}, \vec{p}) = V(\vec{k}, \vec{p}) + PP \int d^3\vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}') G_0 K(\vec{k}', \vec{p})$$

Pour obtenir $k_l(p)$, nous allons effectuer une décomposition angulaire de cette équation. Lorsque le potentiel ne dépend que de k^2, k'^2 et du produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{k}'$, il est possible de le décomposer sur une base de polynômes de Legendre :

$$V(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_l (2l+1)P_l(\hat{k} \cdot \hat{k}')V_l(k, k')$$

Cette décomposition est aussi valable pour la matrice K :

$$K(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_l (2l+1) P_l(\hat{k} \cdot \hat{k}') K_l(k, k')$$

En utilisant la propriété suivante :

$$P_l(\hat{k} \cdot \hat{k}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{k}) Y_{lm}^*(\hat{k}')$$

et la normalisations des harmoniques sphériques, nous retrouvons l'expression suivante pour l'équation (2.30) :

$$K_l(k, p) = V_l(k, p) + 4\pi \int k'^2 dk' V_l(k, k') G_0 K_l(k', p) \quad (2.34)$$

Il s'agit d'un ensemble couplé d'équations intégrales à une dimension. L'expression de la matrice K sur couche est tout simplement donnée par :

$$k_l(p) = K_l(p, p)$$

Gardons en mémoire ces expressions. Dans le cas relativiste, nous allons utiliser une décomposition angulaire qui nous permette de retrouver une équation décomposée de cette forme, de sorte que toutes les relations utiles, en particulier l'équation (2.33) pour le déphasage, soient valables.

2.3.5 Étude du déphasage

Les déphasages $\delta_l(p)$ contiennent toute l'information physique des processus de diffusion pour une onde partielle donnée. Regardons quelques propriétés des déphasages à partir des relations (2.27) et (2.33). Remarquons tout d'abord que la limite lorsque $p \rightarrow 0$ est connue :

$$\delta_l(0) = 0 \mod \pi \quad (2.35)$$

La limite $p \rightarrow \infty$ peut être obtenue en remarquant que l'unitarité à l'infini ne peut être assurée que si $f_l(p \rightarrow \infty) = 0$. Nous aurons donc un déphasage qui tend vers 0 (modulo π) lorsque p tend vers l'infini. Pour éviter des ambiguïtés, nous fixerons $\delta_l(\infty) = 0$.

Il existe un lien entre le nombre N d'états liés d'un système à deux corps et le déphasage. Ce lien a été trouvé par Levinson en 1949 [28] dans un théorème qui porte son nom :

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = N\pi \quad (2.36)$$

Développement à basse énergie : *Effective range expansion*

L'équation de Lippmann-Schwinger pour la matrice K s'écrit explicitement sur couche de la façon suivante :

$$K(\vec{p}, \vec{p}) = V(\vec{p}, \vec{p}) + PP \int d^3\vec{q} V(\vec{p}, \vec{q}) \frac{1}{E_q - E_p} K(\vec{q}, \vec{p})$$

Lorsque le potentiel V est invariant par rotation, il est possible de vérifier que l'équation pour $K(-\vec{p}, -\vec{p})$ est équivalente à l'équation pour $K(\vec{p}, \vec{p})$ grâce à un simple changement de variables. Par conséquent, la fonction $k_l(p)$ est une fonction paire en p . Le déphasage $\delta_l(p)$ est donc une fonction impaire de p . Le développement en ondes partielles de $k_l(p)$ implique aussi qu'il peut s'écrire comme une série de puissances paires de p , commençant par le terme p^{2l} :

$$k_l(p) = \alpha_l p^{2l} + \beta_l p^{2l+2} + o(p^{2l+4})$$

et donc, qu'il est possible, à partir de (2.33), de développer $\tan \delta_l(p)$ sous la forme suivante :

$$\tan \delta_l(p) = p^{2l+1} (a_l + b_l p^2 + o(p^4))$$

d'où l'expression habituelle du développement des déphasages à basse énergie (nommé souvent *effective range expansion*) obtenue par l'inversion :

$$p^{2l+1} \cotan [\delta_l(p)] = \frac{-1}{a_l} + \frac{1}{2} r_l p^2 + o(p^4) \quad (2.37)$$

Pour l'onde S la quantité a_0 s'appelle la *longueur de diffusion*, la quantité r_0 correspond à la portée effective du potentiel. Ce développement est valable lorsque les potentiels sont bornés exponentiellement.

Signalons qu'il est possible de relier les paramètres à basse énergie avec l'énergie de liaison de l'état lié correspondant. En effet, les états liés correspondent à des pôles de l'amplitude de diffusion f dans le plan complexe des p — c'est d'ailleurs ce qui permet de prouver le théorème de Levinson. Pour l'onde S , par exemple, un état lié existe, avec l'énergie $B = \frac{p_0^2}{m}$, si p_0 annule le dénominateur de f :

$$f = \frac{1}{p_0 \cotan \delta - i p_0} \quad (2.38)$$

Pour des valeurs petites de p_0 , nous aurons à résoudre l'équation :

$$\frac{-1}{a_l} + \frac{1}{2} r_l p_0^2 - i p_0 = 0$$

pour avoir la valeur de l'énergie de liaison B correspondante.

2.4 Calcul des potentiels.

Nous disposons d'équations permettant de décrire les états liés et les états de diffusion de deux particules scalaires. Ces équations peuvent être utilisées aussi pour une description non-relativiste des systèmes avec spin. Or ces équations dépendent d'un potentiel d'interaction $V(\vec{p}, \vec{p}')$.

Les potentiels $V(\vec{p}, \vec{p}')$ peuvent être obtenus de différentes façons. De façon générale, il est impossible de déterminer avec exactitude le noyau d'interaction correspondant à un modèle physique, et des approximations sont de ce fait nécessaires. En général, deux familles d'approches sont possibles. Soit par une construction purement phénoménologique ou empirique⁸, aboutissant à des potentiels dépendant d'un certain nombre de paramètres

8. Qui exige néanmoins aux potentiels de respecter certaines symétries fondamentales de la nature.

libres qu'il faut fixer à l'aide de l'expérience, soit en partant de la théorie quantique des champs et déduisant du lagrangien d'interaction de la théorie et d'un certain nombre d'approximations, un potentiel effectif.

C'est cette deuxième approche que nous allons suivre⁹. Une première approximation consiste à supposer que l'interaction est faite par l'échange d'un seul boson. Dans le cas de l'interaction de deux fermions, ces potentiels sont dits *potentiels OBEP*¹⁰. Pour les obtenir, nous partirons d'un lagrangien d'interaction donné et utiliserons les règles de Feynman usuelles pour écrire ces potentiels à partir des amplitudes du processus où un seul boson est échangé.

2.4.1 Problème de compacité des noyaux. Facteurs de forme.

Il est possible d'argumenter que les potentiels «empiriques» sont arbitraires, pour préférer les noyaux calculés par des méthodes issues de la théorie quantique de champ. Il y a néanmoins un problème inhérent à ce genre d'approche qu'il est difficile de résoudre «proprement». En effet, l'équation de Schrödinger n'a de solution que si le potentiel possède certaines propriétés. Ceci est évident en observant l'équation (2.2). Il s'agit d'une équation intégrale, qui n'a de sens que si l'intégrale du terme de droite existe, c'est-à-dire, converge. Ceci n'est possible que si le noyau $V(\vec{p}, \vec{p}')$ décroît assez vite à l'infini¹¹.

Tous les potentiels dérivés de la théorie quantique des champs n'ont pas cette caractéristique. Il est nécessaire de corriger certains d'entre eux pour les rendre plus rapidement décroissants en fonction de l'impulsion et assurer la convergence, en introduisant ce qu'on appelle un *facteur de forme*, *i.e.*, en modifiant la constante de couplage g pour prendre en compte une interaction non ponctuelle, comme il est montré dans la figure (2.1).

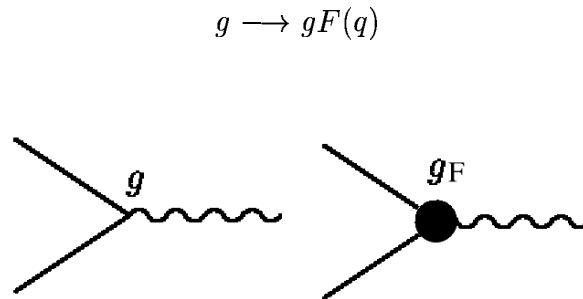


FIG. 2.1 – Introduction d'un facteur de forme

Ces facteurs de forme sont arbitraires, en dehors du fait qu'il est exigé qu'ils respectent les symétries fondamentales de la théorie étudiée. Un facteur de forme souvent

9. Voir [29] pour plus de détails.

10. *One boson exchange potential*.

11. Bien entendu, ce phénomène est aussi présent dans l'équation de Schrödinger dans l'espace des positions. Il s'agit du phénomène d'«effondrement» des potentiels en $\frac{1}{r^s}$ avec $s > 2$, où l'énergie des états liés peut prendre des valeurs arbitrairement grandes en valeur absolue. Lorsque $s < 2$ il n'y a pas d'effondrement. Dans le cas limite $s = 2$, la stabilité du système dépend de la valeur de constante de couplage.

rencontré dans la littérature est le facteur de forme dipolaire, utilisé dans les potentiels dits de Bonn :

$$F(q) = \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{q^2 + \Lambda^2} \right)^n \quad (2.39)$$

2.4.2 Cas des particules scalaires.

Considérons le cas de deux particules scalaires de masse m en interaction par l'intermédiaire d'une particule scalaire de masse μ . Seul un couplage scalaire est possible. Pour dériver un potentiel correspondant à l'échange d'une seule particule, nous partons de l'amplitude \mathcal{K} correspondant au diagramme (2.2). L'amplitude est reliée au potentiel par la relation $V = \frac{\mathcal{K}}{4m^2}$.

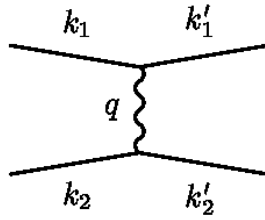


FIG. 2.2 – *Couplage scalaire*

Cette amplitude s'écrit à partir des règles de Feynman sous la forme suivante :

$$\mathcal{K} = \frac{g^2}{q^2 - \mu^2} = \frac{g^2}{(k_1 - k'_1)^2 - \mu^2}$$

Calculons le potentiel dans l'approximation dite *statique*¹², c'est-à-dire, supposons que la composante temporelle des impulsions est conservée à l'amont et à l'aval du processus : $k_{1,0} = k'_{1,0}$. En nous plaçant dans le référentiel au repos $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ et en définissant les variables $\vec{k} = \vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ et $\vec{k}' = \vec{k}'_1 = -\vec{k}'_2$, le potentiel statique a donc l'expression suivante :

$$V(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{-g^2}{4m^2} \frac{1}{(\vec{k}' - \vec{k})^2 + \mu^2} = \frac{-4\pi\alpha}{\vec{q}^2 + \mu^2} \quad (2.40)$$

où nous avons introduit $\alpha = \frac{g^2}{16\pi m^2}$. Ce potentiel ne dépend que de $(\vec{k}' - \vec{k})^2$.

2.4.3 Cas des fermions. Couplages scalaire, pseudo-scalaire

Considérons maintenant le cas de deux fermions. Ils peuvent interagir par l'intermédiaire de particules scalaires, pseudo-scalaires ou vectorielles. Nous nous limiterons ici aux couplages scalaires et pseudo-scalaires définis par les densités lagrangiennes d'interaction suivantes :

$$\mathcal{L}_s^{int} = g\bar{\Psi}\Psi\phi \quad ; \quad \mathcal{L}_{ps}^{int} = ig\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi$$

¹². Le potentiel est dit aussi *non-retardé*.

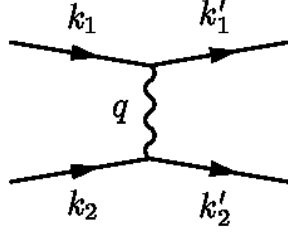


FIG. 2.3 – Couplage entre deux fermions

Couplage scalaire.

Lorsque l'interaction se fait par l'échange d'une particule scalaire et avec un couplage scalaire, l'interaction est dite de Yukawa. Considérons l'amplitude du processus montré dans la figure (2.3). À partir des règles de Feynman, elle s'exprime par l'équation :

$$\mathcal{K} = g^2 \frac{[\bar{u}_1(k_1)u_1(k'_1)][\bar{u}_2(k_2)u_2(k'_2)]}{q^2 - \mu^2}$$

dans laquelle les spineurs de Dirac sont donnés par :

$$u_\sigma(k) = \sqrt{\varepsilon_k + m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} \end{pmatrix} w_\sigma \quad \text{et} \quad \bar{u}_\sigma(k) = \sqrt{\varepsilon_k + m} w_\sigma^\dagger \begin{pmatrix} 1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} \end{pmatrix}$$

où w_σ est le spineur à deux dimensions. Calculons d'abord $[\bar{u}_1(k_1)u_1(k'_1)]$ en nous plaçant dans le référentiel du centre de masse $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ et en utilisant les variables \vec{k} et \vec{k}' définies auparavant :

$$[\bar{u}_1(k_1)u_1(k'_1)] = \sqrt{\varepsilon_k + m} \sqrt{\varepsilon_{k'} + m} \left(1 - \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}')}{(\varepsilon_k + m)(\varepsilon_{k'} + m)} \right)$$

Le potentiel est défini par la relation $V = \frac{\mathcal{K}}{4m^2}$. Comme dans le cas des particules scalaires, nous effectuons l'approximation statique. Elle se traduit ici en fixant l'amplitude sur couche d'énergie, avec $\varepsilon_k \approx \varepsilon_{k'}$. Le potentiel s'exprime donc sous la forme suivante :

$$V = \frac{1}{4m^2} \frac{-g^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} (\varepsilon_k + m)^2 \left(1 - \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}')}{(\varepsilon_k + m)^2} \right) \left(1 - \frac{(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}')}{(\varepsilon_k + m)^2} \right)$$

Introduisons maintenant le spin total $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ et développons le produit des deux termes entre parenthèses, en nous limitant à l'ordre $o(k^2)$:

$$V = \frac{1}{4m^2} \frac{-g^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} (\varepsilon_k + m)^2 \left[1 - \frac{2\vec{k} \cdot \vec{k}'}{(\varepsilon_k + m)^2} - i \frac{2\vec{S} \cdot (\vec{k} \times \vec{k}')}{(\varepsilon_k + m)^2} + o(k^2 k'^2) \right]$$

Avec ce développement nous nous plaçons à la limite des faibles énergies, nous pouvons donc écrire $\varepsilon_k \approx m$. Le potentiel s'exprime alors sous la forme suivante :

$$V_s(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{-g^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} \left[1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}'}{2m^2} - i \frac{\vec{S} \cdot (\vec{k} \times \vec{k}')}{2m^2} \right] \quad (2.41)$$

Notons $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$. En négligeant les termes d'ordre k^2 , nous retrouvons une expression équivalente à celle du cas des particules scalaires :

$$V_s(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{-4\pi\alpha}{\vec{q}^2 + \mu^2}$$

Ce potentiel est le *potentiel de Yukawa*.

Couplage pseudo-scalaire.

L'amplitude correspondant au couplage pseudo-scalaire est donnée par :

$$\mathcal{K} = g^2 \frac{[\bar{u}_1(k_1) i\gamma_5 u_1(k'_1)] [\bar{u}_2(k_2) i\gamma_5 u_2(k'_2)]}{q^2 - \mu^2}$$

avec les termes entre crochets qui peuvent s'exprimer par :

$$\begin{aligned} i [\bar{u}_1(k_1) \gamma_5 u_1(k'_1)] &= \sqrt{\varepsilon_k + m} \sqrt{\varepsilon_{k'} + m} \left(1, \frac{-\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} \end{pmatrix} w_\sigma \\ &= i \sqrt{\varepsilon_k + m} \sqrt{\varepsilon_{k'} + m} \left(\frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} - \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'} + m} \right) \end{aligned}$$

En utilisant les approximations précédentes ($\varepsilon_{k'} \approx \varepsilon_k \approx m$) nous obtenons le terme :

$$i [\bar{u}_1(k_1) \gamma_5 u_1(k'_1)] = i \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = -i \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q}$$

Pour finalement obtenir le potentiel suivant :

$$V_{ps} = \frac{-g^2}{4m^2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + \mu^2}$$

Définissons $\hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}$ et introduisons la fonction :

$$S_{12}(\hat{q}) = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{q}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (2.42)$$

pour écrire le potentiel pseudo-scalaire sous la forme suivante :

$$V_{ps} = \frac{-g^2}{4m^2} \frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + S_{12}(\hat{q})) \quad (2.43)$$

Le terme $S_{12}(\hat{q})$ est nommé la *force tenseur*.

2.4.4 Décomposition angulaire des potentiels.

Les potentiels que nous venons d'obtenir ont tous la particularité de ne dépendre que du scalaire $\vec{q}^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2$, donc des scalaires k , k' et $\cos \theta = \hat{k} \cdot \hat{k}'$. Ils peuvent donc être décomposés dans une base de polynômes de Legendre. Pour cela nous utilisons la relation générale :

$$f(\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}') = \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) f_{\lambda}(q) P_{\lambda}(u) \quad (2.44)$$

avec

$$f_{\lambda}(q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\vec{q}) P_{\lambda}(u) du \quad (2.45)$$

Partons tout d'abord par le facteur $\frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2}$.

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} \right]_{\lambda} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(u)}{\vec{q}^2 + \mu^2} du = \frac{1}{2kk'} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(u)}{z_{\mu} - u} du \\ &= \frac{1}{2kk'} Q_{\lambda}(z_{\mu}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où nous avons introduit les fonctions de Legendre de seconde espèce $Q_{\lambda}(z_{\mu}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(u)}{z_{\mu} - u} du$ et $z_{\mu} = \frac{k^2 + k'^2 + \mu^2}{2kk'}$. Le potentiel de Yukawa se décompose alors, sur la base de polynôme de Legendre, sous la forme suivante :

$$V_{\lambda}^{Yuk}(k, k') = \frac{-4\pi\alpha}{2kk'} Q_{\lambda}(z_{\mu})$$

Remarquons que le terme $\frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + \mu^2}$, qui apparaît dans le potentiel pseudo-scalaire, se décompose simplement sous la forme suivante :

$$\frac{\vec{q}^2}{\vec{q}^2 + \mu^2} = 1 - \frac{\mu^2}{\vec{q}^2 + \mu^2}$$

Considérons maintenant le cas d'un potentiel corrigé d'un facteur de forme dipolaire. Limitons-nous au cas $n = 1$ et considérons le potentiel de Yukawa. Nous aurons à décomposer le facteur suivant :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\vec{q}^2 + \Lambda^2} \right)^2 \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} &= \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} + \frac{\mu^2 - 2\Lambda^2}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} - \frac{\vec{q}^2}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} \\ &= \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} + \frac{\mu^2 - 2\Lambda^2}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} - \frac{1}{\vec{q}^2 + \Lambda^2} + \frac{\Lambda^2}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} \\ \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\vec{q}^2 + \Lambda^2} \right)^2 \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} &= \frac{1}{\vec{q}^2 + \mu^2} - \frac{1}{\vec{q}^2 + \Lambda^2} + \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Décomposons dans la base de polynômes de Legendre le terme suivant :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{(\vec{q}^2 + \Lambda^2)^2} \right]_{\lambda} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(u) du}{(k^2 + k'^2 - 2kk'u + \Lambda^2)^2} \\ &= \frac{\Lambda^2}{(2kk')^2} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_{\lambda}(u) du}{(z_{\Lambda} - u)^2} \end{aligned} \quad (2.48)$$

et introduisons la fonction R_λ définie par :

$$R_\lambda(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_\lambda(u) du}{(\xi - u)^2} = -\frac{d}{d\xi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_\lambda(u) du}{\xi - u} = -\frac{dQ_\lambda(\xi)}{d\xi} \quad (2.49)$$

et $z_\Lambda = \frac{k^2 + k'^2 + \Lambda^2}{2kk'}$. Le potentiel de Yukawa avec un facteur de forme bipolaire se décompose alors sous la forme suivante :

$$V_\lambda^{Yuk}(k, k') = \frac{-4\pi\alpha}{2kk'} \left\{ [Q_\lambda(z_\mu) - Q_\lambda(z_\Lambda)] + \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{2kk'} R_\lambda(z_\Lambda) \right\} \quad (2.50)$$

Dans le cas du potentiel pseudo-scalaire, la décomposition se fait sur une base d'harmoniques sphériques tensorielles.

2.5 Dernières remarques.

Nous venons d'introduire dans ce chapitre les concepts de base qui permettent d'étudier les états liés et les états de diffusion d'un système à deux corps. Nous avons introduit les équations correspondantes, ainsi que les observables physiques : l'énergie de liaison pour les états liés et les déphasages pour la diffusion.

Dans les chapitres suivants, nous allons étendre notre étude aux systèmes relativistes en utilisant les outils introduits dans le premier chapitre dans le cadre de la LFD. Nous chercherons, en particulier, à exprimer des l'équations relativistes sous une forme proche à celle obtenue dans ce chapitre pour le cas non relativiste. Ceci est de fait possible par les analogies observées dans le premier chapitre entre la mécanique quantique non relativiste et le formalisme hamiltonien de la LFD, avec par exemple, les similitudes entre l'équation de Schrödinger et les équations d'évolution en fonction du paramètre σ ou *temps du front de lumière*¹³. En effet, l'un des grands avantages de la LFD est de permettre un interprétation immédiate de la limite non-relativiste des équations, avec par exemple, le vecteur d'état qui s'interprète comme une densité de probabilité à cette limite.

13. *light-cone time*

2.5. DERNIÈRES REMARQUES.

Chapitre 3

Cas de particules scalaires dans la LFD. Calcul des états liés.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer à l'étude de deux particules sans spin en interaction, les différents développements théoriques abordés dans les chapitres précédents. Dans ce chapitre, nous chercherons à obtenir des équations décrivant les états liés à deux particules et limiterons l'étude de leur interaction aux approximations d'ordre le plus faible vis-à-vis de la constante de couplage g ; tout d'abord en nous limitant à l'approximation *ladder*¹ et ensuite en ajoutant à l'interaction la self-énergie, dont la contribution est de même ordre en g .

À la différence du cas non-relativiste, le traitement des états liés dans la CLFD fait apparaître dans la fonction d'onde une dépendance sur la direction \hat{n} du cône de lumière. Pour découpler cette dépendance, les équations seront résolues en décomposant les solutions sur une base d'ondes partielles.

Cette décomposition a plusieurs avantages, tout d'abord en réduisant le calcul des équations intégrales à 3 dimensions à la résolution d'un système d'équations unidimensionnelles couplées. Elle a aussi l'avantage de faciliter une extension à l'étude de la diffusion relativiste. En effet, une telle décomposition angulaire permet d'appliquer à l'étude des états de diffusion le formalisme utilisé habituellement dans le cas non relativiste, en particulier l'obtention des déphasages.

Nous allons étudier en détail une extension du modèle dit de Wick-Cutkosky² [30, 31], dans lequel deux champs réels ϕ et χ de masses respectives m et μ interagissent selon la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \mu^2 \chi^2 \right) + g \phi^2 \chi$$

Le vertex associé à l'interaction est donné par la figure (3.1). Les lignes droites correspondent au champ ϕ , la ligne ondulée au champ χ

Pour dériver l'équation générale régissant les états liés d'un système à deux particules, nous partons de l'équation (1.13) et l'appliquons aux composantes de Fock du

1. Ou *approximation d'échelle*. L'anglicisme est utilisé pour se conformer à l'usage répandu.
2. Dans le modèle de Wick-Cutkosky à proprement parler, la masse de la particule d'échange est nulle et l'interaction est réduite à l'approximation *ladder*

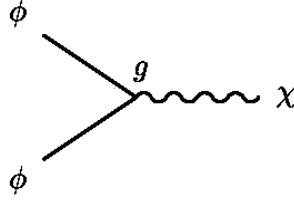


FIG. 3.1 – *Vertex d'interaction dans le modèle de Wick-Cutkosky*

vecteur d'état données dans le premier chapitre (section 1.6.1).

$$\left(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2\right) \Psi(p) = 2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \Psi(p)$$

Pour une composante de Fock $\Psi_{\alpha\beta}$ donnée, le terme de gauche s'exprime par :

$$\left(M^2 - \hat{P}_{(0)}^2\right) \Psi_{\alpha\beta} = (M^2 - s) \Psi_{\alpha\beta} = -2(p \cdot \omega) \tau \Psi_{\alpha\beta}$$

avec $s = (\sum k_i)^2$. La masse M est la masse totale du système. Le terme de droite aura pour expression :

$$2\hat{P}^{(0)} \cdot \omega \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \Psi_{\alpha\beta} = 2(p \cdot \omega) \int \mathcal{H}^{Int}(\omega\tau) \frac{d\tau}{2\pi} \Psi_{\alpha\beta}$$

L'approximation *ladder* est obtenue en se limitant aux fonctions d'onde à deux et trois particules. Cette équation est représentée graphiquement dans la figure (3.2).

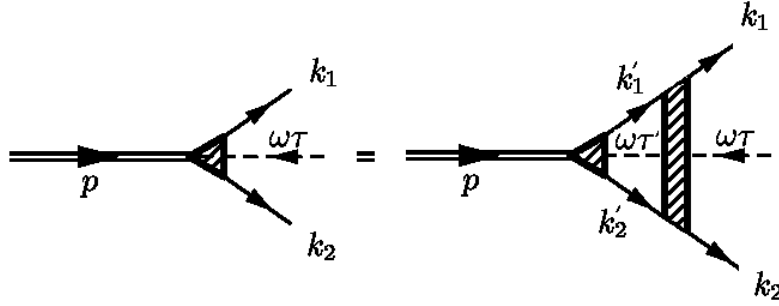


FIG. 3.2 – *Équation pour la fonction d'onde à deux corps.*

La fonction d'onde dépend des impulsions k_1, k_2, p ainsi que de $\omega\tau$, cette dernière impulsion correspondant au *spurion* marqué en traits discontinus sur le graphe. Cette équation a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left[M^2 - (k_1 + k_2)^2\right] \Psi(k_1, k_2, p, \omega\tau) &= \frac{m}{2\pi^3} \int \Psi(k'_1, k'_2, p, \omega\tau') V(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) \times \\ &\quad \delta^{(4)}(k'_1 + k'_2 - p - \omega\tau) \frac{d^3 k'_1}{2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{2\varepsilon_{k'_2}} 2(\omega \cdot p) d\tau' \quad (3.1) \end{aligned}$$

Cette équation est à comparer avec l'équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions. Il apparaît dans cette équation intégrale un noyau qui contient l'interaction $V(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau)$. Ce potentiel est relié à l'amplitude \mathcal{K} par la relation $V = \frac{-\mathcal{K}}{4m^2}$. Le calcul de ce noyau, en prenant en compte l'ensemble des diagrammes de Feynmann permis par le lagrangien d'interaction, est une tâche hors de notre portée. Ce noyau peut néanmoins se simplifier en considérant une réduction de l'interaction à l'échange d'un seul boson dans l'état intermédiaire. Nous construirons alors un potentiel d'interaction OBE³. Dans l'équation (3.14), qui peut s'écrire symboliquement sous la forme :

$$\Gamma = VG_0\Gamma = VG_0VG_0\Gamma = \dots = VG_0VG_0V\dots\Gamma$$

un tel noyau apparaît graphiquement comme une «échelle» infinie, tel qu'il est montré dans la figure (3.3), d'où le nom donné à cette approximation, l'approximation *ladder*.

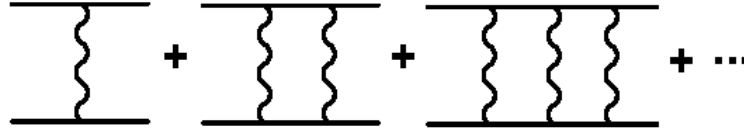


FIG. 3.3 – *Approximation ladder*

L'approximation *ladder* apparaît comme l'itération d'une processus élémentaire (le diagramme de gauche) proportionnel à g^2 , le carré de la constante de couplage. Il s'agit du processus à l'ordre le plus faible en g permettant de décrire l'interaction entre deux particules.

3.1 Paramétrisation du vecteur d'état.

Il est généralement malaisé de travailler avec les impulsions $(k_1, k_2, \tau, \text{etc.})$. Il est souvent plus intéressant de paramétriser le vecteur d'état par un jeu de variables plus facile à manipuler. La paramétrisation du vecteur d'état dans un référentiel quelconque passe par l'application d'une transformation de Lorentz $L^{-1}(\mathcal{P})$.

Prenons $\mathcal{P} = k_1 + k_2 = p + \omega\tau$. Cette transformation de Lorentz correspond à la vitesse⁴ :

$$v = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}_0} = \frac{-(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)}{\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2}}$$

avec $\varepsilon_{k_1} = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m^2}$

3.1.1 Variables \vec{k} et \hat{n}

Définissons dans ce référentiel l'impulsion :

3. One Boson Exchange

4. Rappelons que les particules sont sur couche de masse : $k_1^2 = m^2$, donc $k_{10} = \sqrt{\vec{k}_1^2 + m^2} = \varepsilon_{k_1}$

$$\vec{k} = L^{-1}(\mathcal{P})\vec{k}_1 = \vec{k}_1 - \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\sqrt{\mathcal{P}^2}} \left[k_{10} - \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{\mathcal{P}}}{\sqrt{\mathcal{P}^2} + \mathcal{P}_0} \right] \quad (3.2)$$

dont la composante de genre lumière est donnée par :

$$k_0 = \frac{k_{10}\mathcal{P}_0 - \vec{k}_1 \cdot \vec{\mathcal{P}}}{\sqrt{\mathcal{P}^2}} \quad (3.3)$$

et la direction du front de lumière par :

$$\hat{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega_0} = \frac{L^{-1}(\mathcal{P})\vec{\omega}}{|L^{-1}(\mathcal{P})\vec{\omega}|} = \sqrt{\mathcal{P}^2} \frac{L^{-1}(\mathcal{P})\vec{\omega}}{\omega \cdot p} \quad (3.4)$$

De façon analogue, lorsque $\mathcal{P}' = k'_1 + k'_2$ nous avons :

$$\vec{k}' = L^{-1}(\mathcal{P}')\vec{k}'_1$$

Paramétrisons le vecteur d'état en nous plaçant dans le référentiel où $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$, c'est-à-dire dans le référentiel du centre de masse. Ce référentiel est noté \mathcal{R}_0 et sauf indication contraire, il s'agit de notre référentiel de travail. Se placer dans ce nouveau référentiel revient à prendre à $\vec{\mathcal{P}} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$, et les nouvelles variables sont définies par :

$$\vec{k}_1 = \vec{k} \quad ; \quad k_{10} = \varepsilon_k \quad ; \quad \vec{k}_2 = -\vec{k} \quad ; \quad k_{20} = \varepsilon_k \quad ; \quad \vec{\omega} = \omega_0 \hat{n} \quad (3.5)$$

Nous pouvons alors écrire les équations (3.2) et (3.3) pour k' :

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}' + \frac{\vec{\mathcal{P}}'}{\sqrt{\mathcal{P}'^2}} \left[\varepsilon_{k'} + \frac{\vec{k}' \cdot \vec{\mathcal{P}}'}{\sqrt{\mathcal{P}'^2} + \mathcal{P}'_0} \right] \quad (3.6)$$

La loi de conservation $k_1 + k_2 - \omega\tau = k'_1 + k'_2 - \omega\tau'$, permet d'en déduire, lorsque $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$, la relation suivante :

$$\vec{\mathcal{P}}' = \vec{k}'_1 + \vec{k}'_2 = \vec{\omega}(\tau' - \tau)$$

Élevons au carré les relations $p + \omega\tau = k_1 + k_2$ et $p + \omega\tau' = k'_1 + k'_2$, et utilisons les relations $p^2 = M^2$ et $\omega(k_1 + k_2) = \omega_0(k_{10} + k_{20}) = 2\omega_0\varepsilon_k$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} p^2 + 2p \cdot \omega\tau &= (k_{10} + k_{20})^2 \\ M^2 + 4\tau\omega_0\varepsilon_k &= 4\varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

Les paramètres τ et τ' s'expriment alors sous la forme :

$$\tau = \frac{4\varepsilon_k^2 - M^2}{4\omega_0\varepsilon_k} \quad ; \quad \tau' = \frac{4\varepsilon_{k'}^2 - M^2}{4\omega_0\varepsilon_k} \quad (3.7)$$

ainsi que :

$$\vec{\mathcal{P}}' = \hat{n} \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{\varepsilon_k} \quad ; \quad \mathcal{P}'_0 = \frac{\varepsilon_{k'}^2 + \varepsilon_k^2}{\varepsilon_k} \quad ; \quad \sqrt{\mathcal{P}'^2} = 2\varepsilon_{k'}$$

L'utilisation de ces relations permet de relier k' à k'_1 :

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}' + \hat{n} \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{k}') \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k} \quad (3.8)$$

$$k'_{10} = \frac{\varepsilon_{k'}^2 + \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} + \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k}(\hat{n} \cdot \vec{k}') \quad (3.9)$$

ainsi qu'à k'_2 :

$$\vec{k}'_2 = -\vec{k}' + \hat{n} \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{k}') \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k} \quad (3.10)$$

$$k'_{20} = \frac{\varepsilon_{k'}^2 + \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} - \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k}(\hat{n} \cdot \vec{k}') \quad (3.11)$$

Pour finir, nous exprimons l'impulsion totale à l'aide des variables \vec{k} et \hat{n} :

$$\vec{p} = -\vec{\omega}\tau = -\hat{n} \frac{4\varepsilon_k^2 - M^2}{4\varepsilon_k} \quad ; \quad p_0 = \frac{4\varepsilon_k^2 + M^2}{4\varepsilon_k} \quad (3.12)$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation (3.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$[M^2 - 4(k^2 + m^2)]\Psi(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \Psi(\vec{k}', \hat{n}) \quad (3.13)$$

où la masse totale M est donnée par $M = 2m - B$, B étant l'énergie de liaison de l'état lié. Reformulons cette équation, en introduisant – ce qui est utile pour le traitement de la diffusion – la fonction de vertex⁵ Γ définie par la relation :

$$\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = [M^2 - 4(k^2 + m^2)]\Psi(\vec{k}, \hat{n})$$

pour obtenir l'équation suivante :

$$\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} \Gamma(\vec{k}', \hat{n}) \quad (3.14)$$

3.1.2 Variables \vec{R} et x

Nous avons décrit le système à l'aide des variables \vec{k} et \hat{n} . Il est possible d'introduire un autre jeu de variables utiles :

$$x = \frac{\omega \cdot k_1}{\omega \cdot p} \quad , \quad R_1 = k_1 - xp \quad (3.15)$$

En utilisant les relations énoncées précédemment dans le référentiel \mathcal{R}_0 , en particulier $k_{10} = k_{20} = \varepsilon_k$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$ et $\omega \cdot p = \omega_0(k_{10} + k_{20})$, nous trouvons :

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right) \quad (3.16)$$

5. Remarquons que pour les états liés, $[M^2 - 4(k^2 + m^2)] \neq 0$

Notons que $\omega \cdot R_1 = 0$. Or, la partie spatiale de R peut être décomposée en une partie \vec{R}_\parallel parallèle à la direction de $\vec{\omega}$ et une partie orthogonale \vec{R}_\perp . Il est possible alors d'écrire $R \cdot \omega = R_0 \omega_0 - \vec{R}_\perp \cdot \vec{\omega} = 0$ pour en tirer les relations suivantes :

$$R_0 = |\vec{R}_\parallel|, \quad \vec{R}_\perp^2 = -R^2$$

d'où :

$$\vec{R}_\perp^2 = \vec{k}^2 - (\hat{n} \cdot \vec{k})^2$$

Inversement, nous avons les relations :

$$\vec{k}^2 = \frac{\vec{R}_\perp^2 + m^2}{4x(1-x)} - m^2, \quad (\hat{n} \cdot \vec{k}) = \left(\frac{1}{2} - x\right) \sqrt{\frac{\vec{R}_\perp^2 + m^2}{x(1-x)}} \quad (3.17)$$

Les variables x et \vec{R}_\perp^2 sont des scalaires, de même que \vec{k}^2 et $\hat{n} \cdot \vec{k}$. Pour les fonctions d'onde de moment angulaire nul la fonction d'onde peut donc s'écrire comme une fonction de ces deux variables :

$$\Psi(\vec{k}, \hat{n}) = \Psi(\vec{k}^2, \hat{n} \cdot \vec{k}) = \Psi(\vec{R}_\perp^2, x)$$

L'élément d'intégration $\frac{d^3 \vec{k}}{\varepsilon_k}$ devient alors :

$$\frac{d^3 \vec{k}}{\varepsilon_k} = \frac{d^2 R_\perp dx}{2x(1-x)}$$

L'équation (3.1) s'exprime, à l'aide de ces variables, sous la forme :

$$\left[M^2 - \frac{\vec{R}_\perp^2 + m^2}{x(1-x)} \right] \Psi(\vec{R}_\perp, x) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \Psi(\vec{R}'_\perp, x') V(\vec{R}'_\perp, x'; \vec{R}_\perp, x) \frac{d^2 \vec{R}'_\perp dx'}{2x'(1-x')} \quad (3.18)$$

Nous travaillons généralement avec les variables \vec{k} et \hat{n} , plus «intuitives» que les variables R_\perp et x . Calculons maintenant le noyau en partant de l'amplitude \mathcal{K} correspondant à l'approximation *ladder*, c'est-à-dire, ne comprenant qu'une particule dans l'état intermédiaire.

3.2 Calcul du noyau dans l'approximation *ladder*

Les diagrammes de la CLFD sont des diagrammes ordonnés dans le temps⁶ [12]. L'interaction dans l'approximation *ladder* est représentée par les deux diagrammes représentés sur la figure (3.4). En utilisant les règles diagrammatiques de la LFD (voir l'annexe I), les amplitudes correspondant à ces diagrammes s'expriment par :

6. *time-ordered graphs*

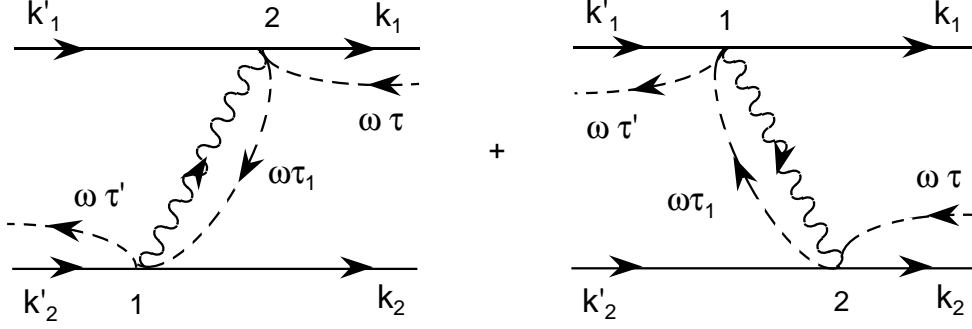


FIG. 3.4 – Noyau de l'interaction dans la ladder approximation

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) &= g^2 \int \Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1)) \delta((k_1 - k'_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau)^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\epsilon} \\
 &\quad + g^2 \int \Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1)) \delta((k'_1 - k_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau')^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\epsilon} \\
 \mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) &= g^2 \left[\frac{\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1))}{\mu^2 - (k_1 - k'_1)^2 + 2\tau\omega \cdot (k_1 - k'_1) - i\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{\mu^2 - (k'_1 - k_1)^2 + 2\tau'\omega \cdot (k'_1 - k_1) - i\epsilon} \right] \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Il est aisément vérifiable que les deux termes de l'addition ne peuvent s'annuler simultanément à cause des fonctions Θ (égales à 1 si son argument est positif, nulles sinon). Ces termes sont hors-couche d'énergie à cause des *spurions*⁷.

3.2.1 Expression avec les variables \vec{k} et \hat{n} .

Exprimons cette expression en utilisant les variables \vec{k} et \hat{n} . Pour cela, nous utilisons les expressions (3.5), (3.8), (3.9) et (3.7). Nous trouvons les relations suivantes :

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) = \vec{k} - \vec{k}' - \hat{n} \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{k}') \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k} \quad (3.20)$$

$$(k_{10} - k'_{10}) = \varepsilon_k - \frac{\varepsilon_{k'}^2 + \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_k} - (\hat{n} \cdot \vec{k}') \frac{\varepsilon_{k'}^2 - \varepsilon_k^2}{2\varepsilon_{k'}\varepsilon_k} = \frac{\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k'}^2}{2\varepsilon_k} \left(1 + \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \right) \quad (3.21)$$

$$(k_1 - k'_1)^2 = (\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k'}^2) \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right) - (\vec{k} - \vec{k}')^2 + (\hat{n} \cdot \vec{k})(\hat{n} \cdot \vec{k}') \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{\varepsilon_{k'}\varepsilon_k} \quad (3.22)$$

7. Remarquons qu'en prenant $\tau = \tau' = 0$ nous retrouvons l'amplitude de Feynmann habituelle :

$$\mathcal{K}(\tau = \tau' = 0) = \frac{g^2}{\mu^2 - (k_1 - k'_1)^2 - i\epsilon}$$

$$\omega \cdot (k_1 - k'_1) = \omega_0 \varepsilon_k \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right) \quad (3.23)$$

$$2\tau\omega \cdot (k_1 - k'_1) = 2(\varepsilon_k^2 - \frac{M^2}{4}) \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right) \quad (3.24)$$

$$\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1)) = \Theta \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right) \quad (3.25)$$

À partir du lien entre le noyau et les amplitudes $V = -\frac{\kappa}{4m^2}$ et avec l'introduction de $\alpha = \frac{g^2}{16\pi m^2}$, le noyau s'écrit –avec ces nouvelles variables– sous la forme suivante :

$$V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = -\frac{4\pi\alpha}{Q^2 + \mu^2} \quad (3.26)$$

avec :

$$Q^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2 + (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k'}^2 - \frac{1}{2}M^2) \left| \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right| - \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{\varepsilon_k \varepsilon_{k'}} (\hat{n} \cdot \vec{k})(\hat{n} \cdot \vec{k}') \quad (3.27)$$

Le noyau dépend explicitement de la direction \hat{n} du front de lumière, ce qui est une particularité de la *CLFD*. À la différence du cas non relativiste, il dépend de l'énergie de liaison du système, par la dépendance en M^2 .

Le terme Q^2 est toujours positif dans le cas des états liés. Comme il sera montré par la suite, ce terme peut changer de signe dans le cas des états de diffusion. Cette écriture est alors purement formelle et n'est gardée qu'en souvenir du calcul des états liés.

3.2.2 Choix d'un repère.

Remarquons que le potentiel ne dépend que des modules k et k' ainsi que des scalaires $(\vec{k} - \vec{k}')^2$, $(\hat{n} \cdot \vec{k})$ et $(\hat{n} \cdot \vec{k}')$. Il est invariant par rotation⁸ ; il est donc possible de choisir n'importe quel repère (*Oxyz*) pour l'exprimer de façon plus explicite. Il est intéressant dans ce cas de choisir la direction du front de lumière \hat{n} parallèle à l'axe z . Ce choix va faciliter par la suite l'identification des harmoniques sphériques permettant une décomposition angulaire –sur les angles $(\hat{n} \cdot \vec{k})$, $(\hat{n} \cdot \vec{k}')$ et les angles azimutaux correspondants– avec les vecteurs propres de l'opérateur de moment cinétique.

Exprimons le noyau en fonction des variables angulaires θ , θ' , φ et φ' indiquées dans la figure (3.2.2). La dépendance azimutale du potentiel n'apparaît que dans le terme $(\vec{k} - \vec{k}')^2 = k^2 + k'^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{k}'$. Le calcul explicite du produit scalaire fait apparaître le cosinus de l'angle $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi'$. Le dénominateur est alors noté sous la forme :

$$Q^2 + \mu^2 = A + B \cos \bar{\varphi}$$

8. Remarquons que ce noyau est invariant sous l'opérateur de parité Π .

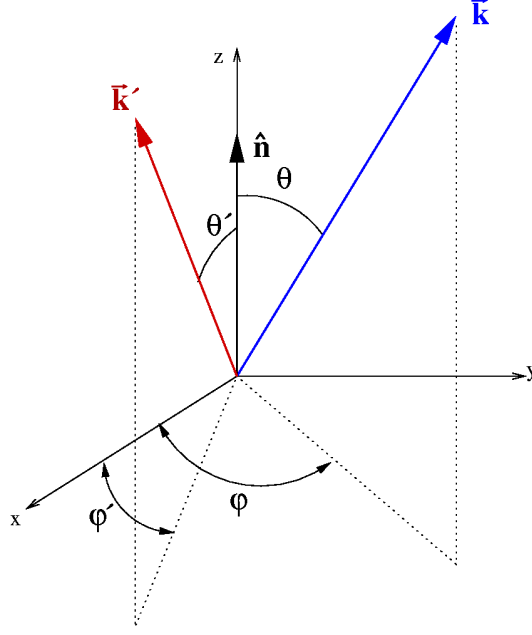


FIG. 3.5 – *Choix des axes. Notons $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi'$*

en définissant :

$$A(k, \theta, k', \theta') = k^2 + k'^2 - kk'(2 + A_1) \cos \theta \cos \theta' + A_2 \left| \frac{k' \cos \theta'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{k \cos \theta}{\varepsilon_k} \right| + \mu^2 \quad (3.28)$$

avec :

$$A_1 = \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{\varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \quad \text{et} \quad A_2 = k^2 + k'^2 + 2m^2 - \frac{1}{2}M^2 \quad (3.29)$$

et :

$$B(k, \theta, k', \theta') = -2kk' \sin \theta \sin \theta' \quad (3.30)$$

et en introduisant les notations $u = \hat{n} \cdot \hat{k} = \cos \theta$ et $u' = \hat{n} \cdot \hat{k}' = \cos \theta'$, nous pouvons exprimer le noyau sous la forme suivante :

$$V(k, u, k', u', \bar{\varphi}, M^2) = \frac{-4\pi\alpha}{A(k, u, k', u', M^2) + B(k, u, k', u') \cos \bar{\varphi}} \quad (3.31)$$

3.3 États de moment angulaire total nul.

L'équation pour les états liés (3.14) (ou son équivalent (3.13)) permet d'obtenir *tout* le spectre des états liés du système étudié ; il est donc possible d'en extraire les énergies de liaison correspondant à n'importe quel moment angulaire à partir de l'observation du comportement à petit k des fonctions d'onde correspondantes. Cette extraction peut néanmoins être malaisée. Par ailleurs, l'équation (3.1.1) est une équation intégrale tridimensionnelle, dont le calcul peut être difficile.

Il est généralement plus utile de chercher uniquement les solutions de l'équation (3.14) pour un moment angulaire donné. Considérons d'abord le cas de l'onde S .

Dans le cas non relativiste, les solutions décrivant les états de moment angulaire nul ne peuvent être que de parité positive. Dans le cadre de la CLFD, des solutions proportionnelles à \hat{n} , donc de parité négative, peuvent être construites. Ces solutions ne possèdent pas de limite non relativiste et sont par conséquent non physiques. Nous nous limitons donc ici à l'étude de l'état $J = 0^+$.

La fonction d'onde, et donc la fonction de vertex, ne dépend dans ce cas que de deux variables scalaires, k et du produit scalaire $u = \hat{k} \cdot \hat{n} = \hat{k} \cdot \hat{u}_z$. L'équation (3.14) s'exprime alors par⁹ :

$$\Gamma(k, u) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} \Gamma(k', u')$$

3.3.1 Décomposition angulaire des solutions.

La fonction de vertex –de même que la fonction d'onde– ne dépendant que de k et u , peut donc être décomposée sur une base de polynômes de Legendre¹⁰ :

$$\Gamma(k, u) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} P_{\lambda}(u) \Gamma_{\lambda}(k) \quad (3.32)$$

Appliquons cette décomposition à l'équation (3.14). En la multipliant par $P_{\lambda}(u)$, en intégrant par du et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre, nous retrouvons le système d'équations couplées suivant :

$$\Gamma_{\lambda}(k) = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_{\lambda'} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{\lambda\lambda'}(k, k', M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} \Gamma_{\lambda'}(k') \quad (3.33)$$

9. Cette équation est la même obtenue dans [13]

10. Le facteur $\sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}}$ est introduit pour obtenir une décomposition du noyau symétrique en λ et λ' . Les polynômes de Legendre sont normalisés selon :

$$\int_{-1}^{+1} du P_l(u) P_{l'}(u) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

où nous avons introduit une projection du noyau sur la base des polynômes de Legendre¹¹ :

$$V_{\lambda\lambda'}(k, k', M^2) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} \int du du' d\varphi' P_\lambda(u) V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) P_{\lambda'}(u') \quad (3.34)$$

Notons tout d'abord que la décomposition angulaire permet d'écrire l'équation (3.14) comme une infinité d'équations couplées (3.33). À partir de ce système d'équations nous pouvons obtenir l'énergie de liaison B correspondant à une constante de couplage α donnée, ou bien la constante de couplage correspondant à une énergie de liaison donnée. Ce système d'équations ne dépend plus explicitement de u . Tant l'énergie de liaison que la constante de couplage obtenues sont donc indépendantes de u . La fonction de vertex globale, par contre, est reconstituée à partir des composantes $\Gamma_\lambda(k)$ et dépend, *a priori*, de u .

3.3.2 Propriétés de $V_{\lambda\lambda'}$

Regardons en détail le noyau projeté sur la base de polynômes de Legendre. Notons $c_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}}$ et \bar{V} la moyenne de V sur φ' :

$$\bar{V}(k, u, k', u') = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

Le noyau projeté prend alors la forme suivante :

$$V_{\lambda\lambda'}(k, k', M^2) = 2\pi c_{\lambda\lambda'} \int_{-1}^{+1} du \int_{-1}^{+1} du' P_\lambda(u) \bar{V}(k, u, k', u') P_{\lambda'}(u') \quad (3.35)$$

Effectuons maintenant les changements de variables $u \rightarrow -u$ puis $u' \rightarrow -u'$. Les propriétés de l'intégrand face à ces changements se retrouvent à partir des expressions données dans (3.28) et (3.30) :

$$A(k, -u, k', -u') = A(k, u, k', u') \quad \text{et} \quad B(k, -u, k', -u') = B(k, u, k', u')$$

En utilisant les propriétés de parité des polynômes de Legendre $P_\lambda(-u) = (-1)^\lambda P_\lambda(u)$, nous trouvons une condition très importante sur les noyaux projetés dans le modèle de Wick-Cutkosky :

$$V_{\lambda\lambda'}(k, k') = (-1)^{\lambda'+\lambda} V_{\lambda\lambda'}(k, k') \quad (3.36)$$

Les $V_{\lambda\lambda'}$ sont donc non nuls si et seulement si la somme $\lambda + \lambda'$ est paire. Cette condition découple le système d'équations (3.33) en deux systèmes d'équations indépendants, l'un pour les λ pairs et reliant les $\Gamma_{\lambda=2n}$ entre eux, l'autre pour les λ impairs.

L'onde S est obtenue dans le premier cas. Il s'agit d'une solution ne faisant intervenir que des polynômes de Legendre de degré pair, donc invariante sous le changement $u \rightarrow$

¹¹. Le facteur 4π est introduit de façon arbitraire pour retrouver une expression équivalente aux équations non relativistes.

3.3. ÉTATS DE MOMENT ANGULAIRE TOTAL NUL.

–*u*. Ce changement est équivalent à la permutation des deux particules ($\vec{k} \longrightarrow -\vec{k}$). Il s'agit donc d'une fonction d'onde symétrique par permutation.

Nous allons par la suite montrer que le second cas correspond à une solution de l'état *P*. Cette solution ne fait intervenir que des polynômes de Legendre de degré impair. Il s'agit alors d'une fonction d'onde antisymétrique par permutation.

3.4 Généralisation pour des moments angulaires quelconques.

Le traitement des systèmes à $J > 0$ est plus complexe. En effet, il existe dans ce cas un ensemble des solutions Γ_a qui sont vecteurs propres de l'opérateur \hat{A}^2 introduit dans le premier chapitre mais ne satisfaisant pas la condition angulaire. Ce ne sont donc pas des solutions physiques. De plus – à la différence du cas non relativiste – il est possible de construire dans le cadre de la CLFD des solutions de parité quelconque, et ce à cause de la dépendance en \hat{n} .

Nous cherchons ici à exprimer de façon générale les états propres Γ_a de \hat{A}^2 en utilisant les propriétés de cet opérateur et des harmoniques sphériques. Ceci va nous conduire à une décomposition angulaire semblable à celle effectuée pour les états S . Nous allons comparer ensuite les équations obtenues pour l'onde P avec celles trouvées à partir de l'expression explicite des solutions pour cette onde partielle [13, 12].

Décomposons d'abord la fonction de vertex sur une base d'harmoniques sphériques :

$$\Gamma(k, \hat{k}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) \Gamma_{\lambda\mu}(k) \quad (3.37)$$

Remarquons que la décomposition en harmoniques sphériques introduit une composante imaginaire. Définissons une composante à μ donné de la fonction de vertex par la relation :

$$\Gamma^\mu(k, \hat{k}) = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) \Gamma_{\lambda\mu}(k)$$

La somme sur λ commence par μ car les $Y_{\lambda\mu}^*$ sont nuls lorsque $\mu < \lambda$. Nous allons vérifier que les $\Gamma^\mu(k, \hat{k})$ sont des vecteurs propres de l'opérateur \hat{A}^2 .

3.4.1 États propres de \hat{A}^2

Cet opérateur fut introduit par (1.22) dans le premier chapitre. Rappelons ici son expression :

$$\hat{A} = \frac{\hat{W} \cdot \omega}{p \cdot \omega} \quad (3.38)$$

dont le carré \hat{A}^2 agit sur le vecteur d'état, ou de façon équivalente, sur la fonction de vertex selon les relations :

$$\hat{A}^2 \Psi = a^2 \Psi \quad ; \quad \hat{A}^2 \Gamma = a^2 \Gamma$$

Regardons en détail cet opérateur :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\hat{W} \cdot \omega}{p \cdot \omega} = \frac{\hat{W}^\mu \omega_\mu}{p \cdot \omega} = \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \omega^\mu p^\nu \hat{M}^{\rho\sigma}}{2p \cdot \omega} \\ &= \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \omega^\mu (p^\nu + \omega^\nu \tau) \hat{M}^{\rho\sigma}}{2p \cdot \omega} \end{aligned}$$

3.4. GÉNÉRALISATION POUR DES MOMENTS ANGULAIRES QUELCONQUES.

où $\hat{M}^{\mu\nu} = \hat{J}_0^{\mu\nu} + \hat{L}^{\mu\nu}(\omega)$ est l'opérateur de moment cinétique, avec :

$$\hat{J}_0^{\mu\nu} = i \int d^3\vec{k} \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) \right) \left(k^\mu \partial_{k_\nu} - k^\nu \partial_{k_\mu} \right)$$

$$\hat{L}^{\mu\nu}(\omega) = i \left(\omega^\mu \partial_{\omega_\nu} - \omega^\nu \partial_{\omega_\mu} \right)$$

Cherchons à exprimer l'opérateur \hat{A}^2 dans le référentiel \mathcal{R}_0 ¹²

$$p \cdot \omega = (p + \omega\tau) \cdot \omega = (p_0 + \omega_0\tau)\omega_0$$

et

$$\hat{A} = \frac{\epsilon_{\mu 0 \rho \sigma} \omega^\mu (p^0 + \omega^0 \tau) \hat{M}^{\rho \sigma}}{2p \cdot \omega} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} n^i \hat{M}^{jk} = -\hat{n} \cdot \vec{M}$$

Or, l'opérateur $\hat{J}_0^{\mu\nu}$ agit sur une composante de Fock en la multipliant par le facteur $i \left(k^\mu \partial_{k_\nu} - k^\nu \partial_{k_\mu} \right)$, donc l'opérateur $\hat{M}^{\mu\nu}$ agit sur une composante de Fock selon la relation suivante :

$$M^{\mu\nu} = i \left(k^\mu \partial_{k_\nu} - k^\nu \partial_{k_\mu} \right) + i \left(\omega^\mu \partial_{\omega_\nu} - \omega^\nu \partial_{\omega_\mu} \right)$$

L'opérateur vectoriel $M^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijl} \hat{M}^{jl}$ prend la forme suivante¹³

$$\vec{M} = -i \left[\hat{n} \times \partial_{\hat{n}} + \vec{k} \times \partial_{\vec{k}} \right] \quad (3.39)$$

Ce qui nous permet d'écrire, dans le système $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$:

$$\hat{A} = i\hat{n} \cdot \left[\vec{k} \times \partial_{\vec{k}} \right]$$

Regardons l'effet de \hat{A}^2 sur la fonction d'onde Γ^μ . Montrons tout d'abord que k et $\hat{n} \cdot \vec{k}$ sont scalaires pour \hat{A}^2 :

$$\begin{aligned} \hat{A}k^2 = \hat{A}k^l k^l &= -in^i \epsilon_{ijm} k^j \partial_{k_m} k^l k^l \\ &= -2in^i \epsilon_{ijm} k^j k^l \delta_{ml} \\ &= -2in^i \epsilon_{ijl} k^j k^l = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

De même¹⁴ :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\hat{n} \cdot \vec{k}) = \hat{A}n^l k^l &= -in^i \epsilon_{ijm} k^j \partial_{k_m} n^l k^l \\ &= -in^i \epsilon_{ijl} k^j n^l \\ \hat{A}^2(\hat{n} \cdot \vec{k}) = \hat{A}(\hat{A}n^l k^l) &= -n^l \epsilon_{lmn} k^m \partial_{k_n} (n^i \epsilon_{ijq} k^j n^q) \\ &= -n^l n^i n^q \epsilon_{lmn} \epsilon_{inq} k^m \\ &= -(\delta_{lq} \delta_{mi} - \delta_{li} \delta_{mq}) n^l n^i n^q k^m = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

12. Pour rappel, il s'agit du référentiel du centre de masse : $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{p} + \vec{\omega}\tau = 0$

13. Le produit vectoriel est noté : $a \times b = \epsilon_{ijk} a^j b^k$

14. En utilisant la relation :

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}$$

Appliquons maintenant \hat{A}^2 sur $\Gamma^\mu(k, \hat{k})$. \hat{A}^2 n'a aucune action sur la fonction scalaire $\Gamma_{\lambda\mu}(k)$ et n'agit que sur les harmoniques sphériques.

$$\hat{A}^2 \Gamma^\mu(k, \hat{k}) = \sum_{\lambda=\mu}^{\infty} \Gamma_{\lambda\mu}(k) \hat{A}^2 Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k})$$

Or les $Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k})$ permettent de factoriser la partie angulaire en $u = \hat{n} \cdot \vec{k}$, argument des polynômes de Legendre $P_{\lambda\mu}(u)$, et une partie dépendant de l'angle azimutal φ proportionnelle à $e^{i\mu\varphi}$. L'opérateur \hat{A}^2 n'agit que sur cette exponentielle. Dans le choix de coordonnées où $z \parallel \hat{n}$, son expression est donnée par :

$$\hat{A}^2 = -([\vec{k} \times \partial_{\vec{k}}]_z)^2 = -(\partial/\partial\varphi)^2$$

Ce qui finalement conduit à multiplier Γ^μ par μ^2 . La fonction de vertex Γ^μ est donc un vecteur propre de l'opérateur \hat{A}^2 :

$$\hat{A}^2 \Gamma^\mu(k, \hat{k}) = \mu^2 \Gamma^\mu(k, \hat{k}) = a^2 \Gamma^\mu(k, \hat{k})$$

L'entier μ s'assimile donc à la valeur propre a .

3.4.2 Équation pour les états liés.

La décomposition (3.37) permet de construire des états propres de \hat{A}^2 . Une décomposition angulaire semblable à celle appliquée à l'onde S est donc possible, en utilisant cette fois-ci les harmoniques sphériques $Y_{\lambda\mu}(\hat{k})$, qui dépendent des deux variables angulaires u et φ . Décomposons le potentiel sur cette base :

$$V(k, \hat{k}, k', \hat{k}') = 4\pi \sum_{\lambda\mu\lambda'\mu'} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) V_{\lambda\mu\lambda'\mu'}(k, k', M^2) Y_{\lambda'\mu'}(\hat{k}') \quad (3.42)$$

En introduisant (3.37) et (3.42) dans (3.14), puis en multipliant l'équation par $Y_{\lambda\mu}(\hat{k})$ et en intégrant sur $d\hat{k}$, l'équation pour les états liés devient¹⁵ :

$$\Gamma_{\lambda\mu}(k) = 4\pi \sum_{\lambda'\mu'} \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{\lambda\mu\lambda'\mu'}(k, k', M^2)}{[M^2 - 4(k^2 + m^2)]} \Gamma_{\lambda'\mu'}(k') \quad (3.43)$$

Étudions plus en détail le potentiel $V_{\lambda\mu\lambda'\mu'}(k, k', M^2)$:

$$V_{\lambda\mu\lambda'\mu'}(k, k', M^2) = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{k} \int d\hat{k}' Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) V(k, \hat{k}, k', \hat{k}', M^2) Y_{\lambda'\mu'}^*(\hat{k}')$$

Les harmoniques sphériques peuvent s'écrire en faisant apparaître les fonctions de Legendre :

$$Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) = (-1)^\mu \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\lambda-\mu)!}{(\lambda+\mu)!}} P_{\lambda\mu}(\cos\theta) e^{i\mu\varphi}$$

¹⁵. Avec la normalisation des harmoniques sphériques

$$\int d\hat{k} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) Y_{\lambda'\mu'}(\hat{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}$$

3.4. GÉNÉRALISATION POUR DES MOMENTS ANGULAIRES QUELCONQUES.

Par ailleurs, le potentiel ne dépend que de l'angle $\bar{\varphi} = \varphi' - \varphi$. L'intégration sur φ n'agit que sur $e^{i(\mu-\mu')\varphi}$ et fait apparaître un facteur $2\pi\delta_{\mu\mu'}$. Le potentiel projeté sur la base d'harmoniques sphériques est donc donné par :

$$V_{\lambda\lambda'\mu\mu'}(k, k', M^2) = \delta_{\mu\mu'} c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} V(k, u, k', u', \bar{\varphi}, M^2) e^{i\mu\bar{\varphi}}$$

avec le coefficient numérique :

$$c_{\lambda\lambda'\mu} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} \sqrt{\frac{(\lambda-\mu)! (\lambda'-\mu)!}{(\lambda+\mu)! (\lambda'+\mu)!}}$$

Le potentiel ne dépendant de φ que par $\cos \bar{\varphi}$, et l'intégration sur $\bar{\varphi}$ annulant le terme en $\sin(\mu\bar{\varphi})$ issu de l'exponentielle, le potentiel projeté sur la base des harmoniques sphériques s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} V_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'}(k, k', M^2) &= \delta_{\mu\mu'} c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} V(k, u, k', u', \bar{\varphi}, M^2) \cos(\mu\bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Cette décomposition du potentiel garde, bien entendu, les mêmes propriétés énoncées dans (3.36) par rapport aux valeurs admises de λ et λ' . En effet, le noyau est non nul si et seulement si l'intégrand –par rapport à u et u' – est pair en u, u' . Or les fonctions de Legendre $P_{\lambda\mu}(-u) = (-1)^{\lambda+\mu} P_{\lambda\mu}(u)$ font bien apparaître la condition exigeant que $\lambda + \lambda'$ soit un nombre pair.

L'équation (3.43) ne dépend donc plus de l'indice μ' et de plus, toute dépendance en μ est découplée. L'équation (3.43) se réduit, pour un μ donné¹⁶, à :

$$\Gamma_{\lambda}^{\mu}(k) = 4\pi \sum_{\lambda'} \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{\lambda\lambda'}^{(\mu)}(k, k', M^2)}{[M^2 - 4(k^2 + m^2)]} \Gamma_{\lambda'}^{\mu}(k') \quad (3.45)$$

Cette équation généralise le résultat obtenu pour l'onde S . Il suffit pour cela de prendre les valeurs paires $\{\lambda = 0, 2, 4, \dots\}$ et $\mu = 0$. De même, l'onde $P_{a=0}$ est obtenue en prenant les valeurs impaires $\{\lambda = 1, 3, 5, \dots\}$. Remarquons que $P_{\lambda < \mu, \mu}(u) = 0$ implique que pour construire des états propres de l'opérateur \hat{A}^2 avec la valeur propre $a = \mu$, il faut démarrer le développement à partir de $\lambda = \mu$. Résoudre cette équation revient donc à obtenir la fonction d'onde pour un système à J donné. L'onde S est obtenue en écrivant l'équation pour $\{\lambda = 0, 2, 4, \dots\}$, l'onde P par deux équations ($\mu = 0, \pm 1$) à partir des valeurs $\{\lambda = 1, 3, 5, \dots\}$, l'onde D par trois équations ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$) avec $\{\lambda = 2, 4, 6, \dots\}$ et ainsi de suite.

16. L'indice μ est sous-entendu lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

3.4.3 Cas de l'onde P

La décomposition obtenue permet d'obtenir les états de moment angulaire arbitraire. Nous vérifierons ici que nous retrouvons les équations dérivées pour l'onde P par Mangin-Brinet dans sa thèse [13]. La méthode suivie par celle-ci consiste à écrire explicitement les fonctions de vertex solutions pour l'onde P . Pour une parité négative, elle a la forme suivante :

$$\Gamma_\mu(\vec{k}, \hat{n}) = f_1(k, \hat{n} \cdot \hat{k}) Y_{1\mu}(\hat{k}) + f_2(k, \hat{n} \cdot \hat{k}) Y_{1\mu}(\hat{n})$$

Un état de parité positive a pour sa part l'expression suivante :

$$\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = [\hat{n} \times \hat{k}] f_3(k, \hat{n} \cdot \hat{k})$$

Seul le premier cas permet d'obtenir la limite non-relativiste (il suffit de faire disparaître la dépendance en \hat{n}). L'état de parité positive est proportionnel à $[\hat{n} \times \hat{k}]$, ce qui implique que l'équation (1.11) ne peut pas être satisfaite. L'état $J^\pi = 1^+$ est par conséquent un état non-physique. Nous limitons donc notre étude à l'état $J^\pi = 1^-$. Les états propres de \hat{A}^2 ont alors l'expression suivante :

$$\Psi_a^\pi(\vec{k}, \hat{n}) = \chi_a^\pi(\hat{k}, \hat{n}) g_a^\pi(k, \hat{n} \cdot \hat{k}) \quad (3.46)$$

avec :

$$\begin{cases} \chi_0^-(\hat{k}, \hat{n}) = 3(\hat{n} \cdot \hat{k})\hat{n} \\ \chi_1^-(\hat{k}, \hat{n}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}(\hat{k} - (\hat{n} \cdot \hat{k})\hat{n}) \\ \chi_1^+(\hat{k}, \hat{n}) = 3[\hat{n} \times \hat{k}] \end{cases}$$

de sorte que l'équation (3.13) peut être écrite sous la forme de deux équations découplées :

$$[M^2 - 4(k^2 + m^2)]u g_0^-(k, u) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) u' g_0^-(k', u') \quad (3.47)$$

$$[M^2 - 4(k^2 + m^2)](1 - u^2) g_1^\pm(k, u) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) (\hat{k} \cdot \hat{k}' - uu') g_1^\pm(k', u') \quad (3.48)$$

Remarquons qu'en posant $f(k, u) = u g_0^-(k, u)$, il apparaît une fonction obéissant à l'équation pour l'état $J = 0$. Il est intéressant de noter que le facteur u correspond au premier polynôme de Legendre $P_1(u) = u$, et peut être écrit comme une somme de polynômes de Legendre de degré impair $x = \sum c_{2n+1} P_{2n+1}(u)$. La décomposition de $g_0^-(k, u)$ dans une base de $P_\lambda(u)$ et l'intégration par u fait apparaître dans le terme de gauche des $g_\lambda(k)$ avec λ impair. Dans le terme de droite, le noyau est multiplié par des polynômes de Legendre impairs d'arguments u et u' . L'absorption des coefficients numériques dans les g_λ permet de retrouver l'équation (3.33) limitée à la famille des λ impairs.

Quant à la deuxième équation, nous remarquerons que le facteur $(\hat{k} \cdot \hat{k}' - uu')$ s'écrit explicitement sous la forme suivante¹⁷ :

$$(\hat{k} \cdot \hat{k}' - uu') = \sin \theta \sin \theta' \cos \bar{\varphi}$$

17. $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi'$

3.4. GÉNÉRALISATION POUR DES MOMENTS ANGULAIRES QUELCONQUES.

Dans le cas de l'onde $P_{a=\mu=1}$ le noyau projeté (3.44) fait apparaître le noyau $V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n})$ multiplié par un facteur $\cos \bar{\varphi}$. Ce facteur se retrouve dans l'équation (3.48), qui s'exprime aussi par :

$$[\dots] \sin^2 \theta g_1^\pm(k, u) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} du' d\bar{\varphi} V(k, u, k', u', \varphi, M^2) \cos \bar{\varphi} \sin \theta \sin \theta' g_1^\pm(k', u')$$

Notons $\bar{V}_1(k, u, k', u', M^2) = \frac{1}{2\pi} \int d\bar{\varphi} V(\dots, \bar{\varphi}) \cos \bar{\varphi}$. Lorsque $\sin \theta \neq 0$, on peut introduire $G(k, u) = \sin \theta g_1^\pm(k, u)$. Par ailleurs, la fonction sinus peut être écrite comme une somme de $P_{\lambda, \mu=1}(u)$ avec λ impair. Cette équation devient :

$$[\dots] \sum_{\lambda=1,3,\dots} c_\lambda P_{\lambda,1}(u) G(k, u) = \dots \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} du' \bar{V}_1(\dots) \sum_{\lambda=1,3,\dots} c_\lambda P_{\lambda,1}(u) G(k', u')$$

En décomposant les fonctions $G(k, u)$ sur une base de $P_{\lambda',1}(u')$ impairs –les relations d'orthogonalité entre les $P_{\lambda\mu}$ permettent d'annuler les autres valeurs de λ et μ –, en intégrant l'équation sur u et par une réabsorption des constantes dans les $G_{\lambda,1}$, il est aisé de retrouver une équation équivalente à notre décomposition :

$$[M^2 - 4(k^2 + m^2)] G_{\lambda,1}(k) = \dots \sum_{\lambda' \text{ impairs}} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} c_{\lambda\lambda'} du du' P_{\lambda,1}(u) \hat{V}_1(\dots) P_{\lambda',1}(u') G_{\lambda',1}(k')$$

3.4.4 Propriétés de $V_{\lambda\lambda'}^\mu$.

Nous avons vu que le potentiel $V_{\lambda\lambda'\mu}$ obéit à la relation (3.36) quelle que soit la valeur de μ , *i.e.* il est non nul si et seulement si la somme $\lambda + \lambda'$ est paire.

Son intégrand possède aussi des propriétés intéressantes de symétrie qui peuvent être utiles lorsqu'il est nécessaire d'intégrer le noyau numériquement. Revenons sur l'expression du potentiel $V_{\lambda\lambda'\mu}$ donné dans (3.44). En introduisant \bar{V}_μ défini par :

$$\bar{V}_\mu(k, u, k', u') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} \cos(\mu\bar{\varphi}) V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

l'expression de potentiel est alors donnée par :

$$\begin{aligned} V_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'}(k, k', M^2) &= 2\pi \delta_{\mu\mu'} c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \bar{V}_\mu(k, u, k', u') \\ &= 2\pi \delta_{\mu\mu'} c_{\lambda\lambda'\mu} \int_{-1}^{+1} du \left[\int_{-1}^u du' + \int_u^{+1} du' \right] (P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \bar{V}_\mu(k, u, k', u')) \end{aligned}$$

Le terme de gauche apparaît comme la somme de deux termes identiques. En effet, le dernier terme peut être identifié au premier en faisant successivement les changements de variable $u' \rightarrow -u'$ et $u \rightarrow -u$. Nous aurons alors la relation :

$$V_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'}(k, k', M^2) = 4\pi \delta_{\mu\mu'} c_{\lambda\lambda'\mu} \int_{-1}^{+1} du \int_{-1}^u du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \bar{V}_\mu(k, u, k', u')$$

Cette relation est utile pour simplifier les intégrations numériques angulaires lorsque le calcul analytique de l'une de ces intégrations n'est plus possible. Nous pouvons voir graphiquement les propriétés de symétrie du noyau avant l'intégration angulaire. Dans ce qui suit, la dépendance angulaire de noyau projeté sur les polynômes de Legendre est présentée avant les intégrations angulaires. Toutes les images sont fonction de θ et θ' pour des valeurs de k et k' , avec $\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, $m = 1$ et $B = 0.25$.

La figure (3.6) montre l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Les différents graphes montrent l'évolution de l'intégrand en fonction des dissymétries en k et k' pour une configuration symétrique en λ et λ' . Il est régulier dans toutes les configurations mais possède une partie étroite centrale très piquée qu'il faut intégrer avec précaution. Le cas le plus délicat correspond à la configuration $k = k'$, pour $\theta = \theta'$. Lorsque la masse échangée $\mu = 0$, le potentiel devient singulier pour ces paramètres.

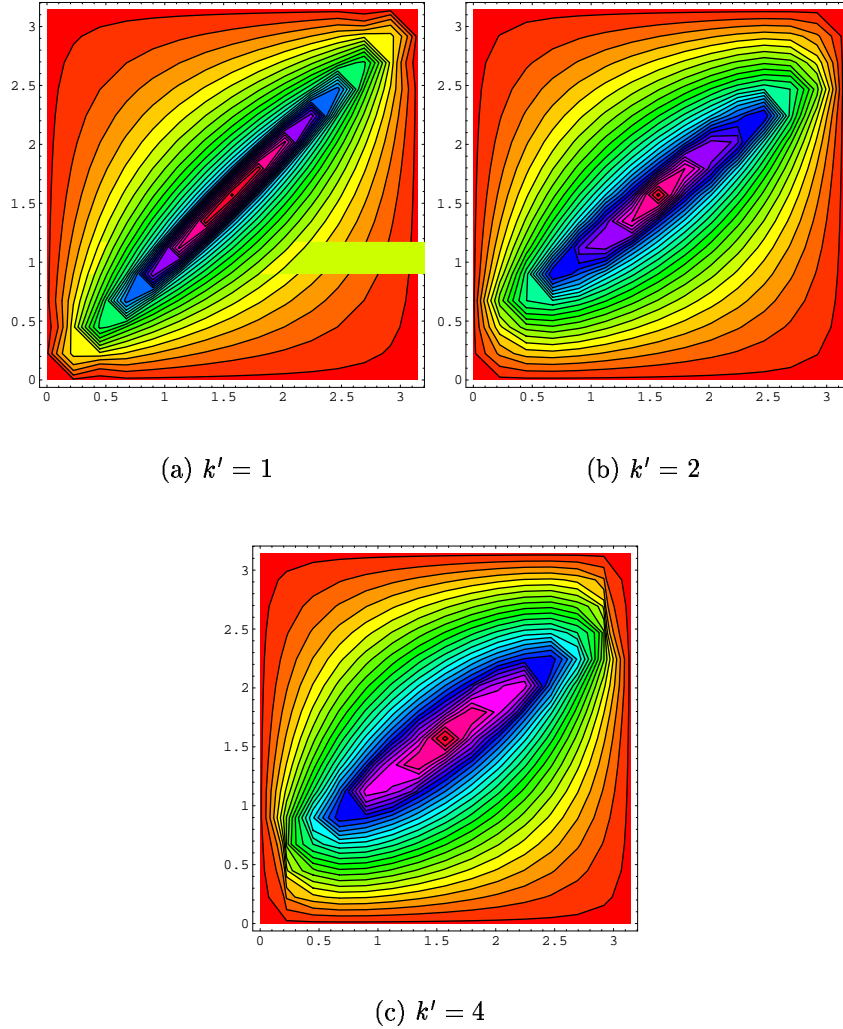
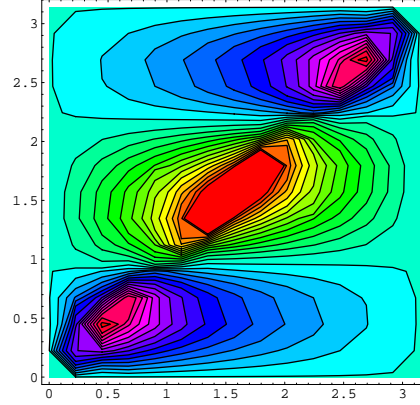


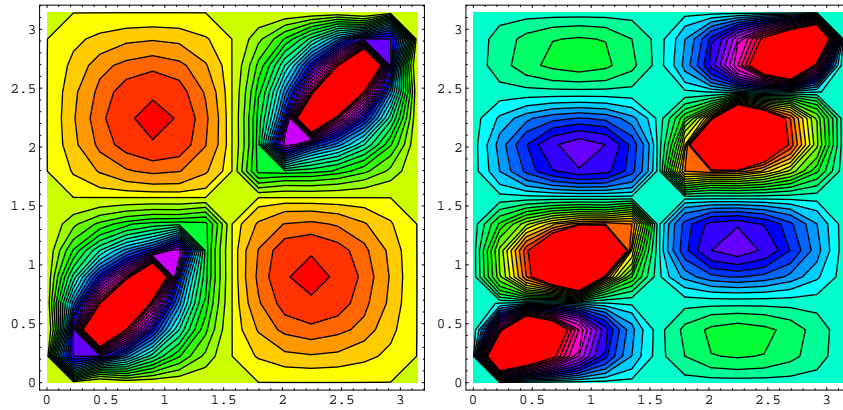
FIG. 3.6 – Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici nous montrons, pour $\lambda = \lambda' = 0$, trois images à $k = 1$ fixé et trois valeurs de k' différentes.

3.5. MÉTHODE DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS.

La figure 3.7 montre cette fois-ci l'évolution de l'intégrand pour des valeurs différentes de λ, λ' , pour $k = k'$. Remarquons que la dissymétrie en λ et λ' s'accompagne de l'apparition de «collines» et «cavités» symétriques par rapport au centre $\theta = \theta'$, d'autant plus nombreuses que λ (ou λ') est élevé.



(a) $\lambda = 0, \lambda' = 2$



(b) $\lambda = 1, \lambda' = 1$

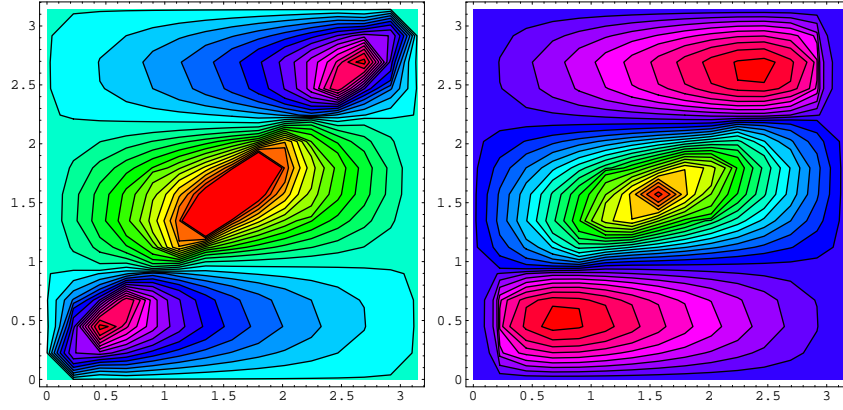
(c) $\lambda = 1, \lambda' = 3$

FIG. 3.7 – Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici nous fixons $k = k' = 1$, λ et λ' prenant des valeurs différentes.

Pour finir, la figure 3.8, montre l'influence de la dissymétrie en k et k' pour des valeurs de λ, λ' différentes. Ce changement s'accompagne juste d'une déformation des «collines» et «cavités».

3.5 Méthode de résolution des équations.

Résoudre l'équation pour les états liés passe maintenant par la résolution de (3.45), un système d'une infinité d'équations intégrales couplées à une dimension. La méthode



(a) $k = k' = 1, \lambda = 0, \lambda' = 2$ (b) $k = 1, k' = 4, \lambda = 0, \lambda' = 2$

FIG. 3.8 – Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici, nous montrons un cas dissymétrique en k, k', λ, λ'

de résolution numérique choisie consiste en une discrétisation sur une base de fonctions de spline. Le calcul de chacune des intégrales unidimensionnelles (sur k') du système d'équations couplées passe d'abord par la connaissance d'un noyau projeté $V_{\lambda\lambda'}^\mu(k, k')$. Ces différents $V_{\lambda\lambda'}^\mu$ sont obtenus par trois intégrations angulaires (sur u, u' et φ). Nous allons montrer que deux de ces intégrations peuvent être calculées analytiquement, la troisième devant être faite numériquement.

3.5.1 Calcul analytique partiel du noyau.

Écrivons à nouveau le potentiel décomposé (3.49) :

$$V_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'}(k, k', M^2) = 2\pi\delta_{\mu\mu'}c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \bar{V}_\mu(k, u, k', u')$$

avec :

$$\bar{V}_\mu(k, u, k', u') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} \cos(\mu\bar{\varphi}) V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

Expression analytique de \bar{V}_μ

Regardons tout d'abord \bar{V}_0 . Son expression analytique est connue¹⁸ et donnée par :

$$\bar{V}_0 = \frac{-4\pi\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{A + B \cos \varphi'} = \begin{cases} \frac{-4\pi\alpha \operatorname{sign}(A)}{\sqrt{A^2 - B^2}} & \text{si } |A| > B \\ \frac{-4i\pi\alpha}{\sqrt{B^2 - A^2 - i\epsilon}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.49)$$

18. Nous utilisons le fait que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{A + B \cos(\varphi' - \varphi)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{A + B \cos \varphi'}$$

Pour les états liés, A est positif et toujours plus grand que B , ce qui correspond à la première solution. Comme nous le montrerons dans le chapitre prochain, les processus de diffusion inélastique font intervenir la deuxième solution.

Les \bar{V}_μ peuvent s'exprimer à l'aide de \bar{V}_0 . Voici leur expression¹⁹ pour les premières valeurs de μ :

$$\bar{V}_\mu = \frac{-4\pi\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\mu\varphi)}{A + B \cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{1}{B} (-4\pi\alpha - A\bar{V}_0) \\ \bar{V}_2 = \frac{1}{B^2} (8\pi\alpha A + [2A^2 - B^2]\bar{V}_0) \\ \bar{V}_3 = \frac{-1}{B^3} (-4\pi\alpha[B^2 - 4A^2] + A[4A^2 - 3B^2]\bar{V}_0) \end{cases} \quad (3.50)$$

Tous les \bar{V}_μ s'expriment en fonction de V_0 par des relations simples. Il reste deux intégrations angulaires à faire, l'une d'elles pouvant être obtenue analytiquement.

Calcul analytique de l'intégration sur u' lorsque $\mu = 0$

Étudions en détail l'expression (3.49) et cherchons une autre expression du dénominateur. Par la suite, nous nous limiterons au cas $|A| > B$, seul cas possible dans le traitement des états liés. Nous introduirons, lorsqu'il est pertinent, l'indice \pm qui indique le signe de $\left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k}\right)$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left[(k^2 + k'^2 + \mu^2) - (2 + A_1)kk'uu' + A_2 \left| \frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k} \right| \right]^2 \\ B^2 &= 4k^2k'^2 - 4k^2k'^2u^2 + 4(u^2 - 1)k^2k'^2u'^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\pm^2 &= (k^2 + k'^2 + \mu^2)^2 + (2 + A_1)^2 k^2 k'^2 u^2 u'^2 + A_2^2 \left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k} \right)^2 \\ &\quad - 2(k^2 + k'^2 + \mu^2)(2 + A_1)kk'uu' \pm 2(k^2 + k'^2 + \mu^2)A_2 \left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k} \right) \\ &\quad \mp 2(2 + A_1)kk'uu'A_2 \left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k} \right) \end{aligned}$$

L'argument de la racine peut être mis sous la forme de deux polynômes du second degré indexés par l'indice \pm

$$A_\pm^2 - B^2 = \alpha_\pm u'^2 + \beta_\pm u' + \gamma_\pm \quad (3.51)$$

19. Le calcul de ces expressions est trivial. La première d'entre elles, par exemple, est obtenue en utilisant la relation :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{A + B \cos \varphi} = \frac{1}{B} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{B \cos \varphi - A + A}{A + B \cos \varphi} = \frac{1}{B} [2\pi - AV_0]$$

avec :

$$\alpha_{\pm} = (2 + A_1)^2 k^2 k'^2 u^2 + \frac{A_2^2 k'^2}{\varepsilon_{k'}^2} - 4k^2 k'^2 (u^2 - 1) \mp 2A_2(2 + A_1) \frac{k k'^2}{\varepsilon_{k'}} u \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\pm} = & -\frac{2A_2^2 k k'}{\varepsilon_k \varepsilon_{k'}} u - 2(k^2 + k'^2 + \mu^2)(2 + A_1) k k' u \\ & \pm 2A_2 k' \left[\frac{1}{\varepsilon_{k'}} (k^2 + k'^2 + \mu^2) + \frac{(2 + A_1) k^2}{\varepsilon_k} u^2 \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} = & (k^2 + k'^2 + \mu^2)^2 + \frac{A_2^2 k^2}{\varepsilon_k^2} u^2 + 4k^2 k'^2 (u^2 - 1) \\ & \mp 2A_2 (k^2 + k'^2 + \mu^2) \frac{k}{\varepsilon_k} u \end{aligned} \quad (3.54)$$

Pour obtenir l'intégration sur u' , il suffit alors de calculer, entre les différentes bornes définissant les régions (+) et (-), l'intégrale :

$$F_{\lambda} = \int \frac{P_{\lambda}(u') du'}{\sqrt{\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma - i\epsilon}} \quad (3.55)$$

dont l'expression analytique est connue. Ces fonctions sont données dans l'annexe (III), ainsi que leur extension F_{λ}^{μ} .

Calul de l'intégrale pour les grandes valeurs de λ

Le calcul de l'intégrale (3.55) est direct pour tout λ en utilisant la relation de récurrence reliant les P_{λ} entre eux :

$$(\lambda + 1)P_{\lambda+1}(u) = (2\lambda + 1)uP_{\lambda}(u) - \lambda P_{\lambda-1}(u)$$

Les fonctions F_{λ} à tout ordre peuvent donc être construites à partir des F_{λ} d'ordre inférieur par la relation de récurrence :

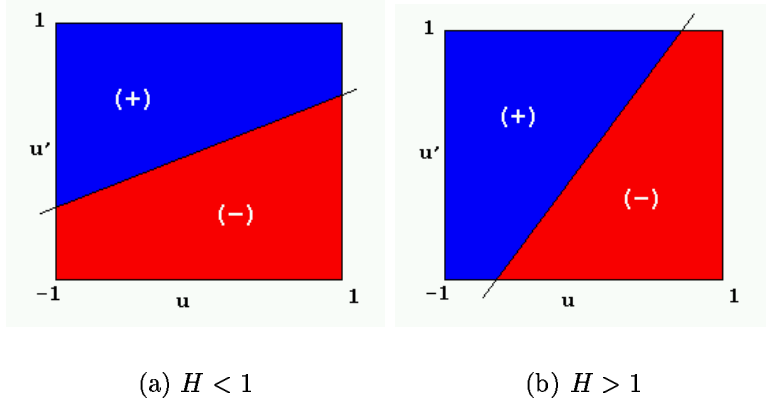
$$(\lambda + 1)F_{\lambda+1}(u) = (2\lambda + 1) \int \frac{uP_{\lambda}(u) du}{\sqrt{\alpha u^2 + \beta u + \gamma}} - \lambda F_{\lambda-1}(u) \quad (3.56)$$

Bornes d'intégration et différents domaines.

Les regions (+) et (-) sont définies en fonction du signe de $\left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k}\right)$. Dans le plan $[u, u']$, ces deux régions sont délimitées par la droite $u'_0 = Hu$ avec :

$$H = \frac{k \varepsilon_{k'}}{k' \varepsilon_k}$$

La valeur limite u'_0 nous permet de séparer deux domaines d'intégration. En pratique, nous considérons deux cas, le cas $H < 1$ ou le cas $H > 1$ (voir figure (3.9)). L'intégration numérique restante (sur u) se fait entre ces domaines. Dans le premier cas, il ne faut considérer qu'un seul régime (quelle que soit la valeur de u , les deux régions existent). Dans le second cas, il faut traiter trois cas différents : Lorsqu'il n'y a que la région (+), lorsqu'il n'y a que la région (-) ou le cas intermédiaire où il y a coexistence.


 FIG. 3.9 – Domaines (+) et (–) correspondant au signe de $\left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k}\right)$

Ce dernier cas est moins aisé à traiter numériquement. Il est plus intéressant de revenir au premier cas, en inversant les rôles de u et u' . Les régions (+) et (–) sont aussi échangées et le calcul peut se faire directement en changeant $\lambda \leftrightarrow \lambda'$ et $k \leftrightarrow k'$.

De la même manière, nous devons considérer deux domaines à l'intérieur de chaque région (+) et (–). En effet, la partie réelle (si $|A| > B$) de l'intégration sur φ s'écrit :

$$\frac{\text{sign}(A)}{\sqrt{A^2 - B^2}}$$

Regardons le signe de A :

$$A_{\pm} = (k^2 + k'^2 + \mu^2) - (2 + A_1)kk'u u' \pm A_2 \frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} \mp A_2 \frac{ku}{\varepsilon_k} \quad (3.57)$$

$$= \left[(k^2 + k'^2 + \mu^2) \mp A_2 \frac{ku}{\varepsilon_k} \right] - u' \left[(2 + A_1)kk'u \mp A_2 \frac{k'}{\varepsilon_{k'}} \right] \quad (3.58)$$

$$A_{\pm} = X_{\pm} + u'Y_{\pm} \quad (3.59)$$

Deux cas sont alors possibles :

- soit $Y > 0$ (A décrit une droite de pente positive en fonction de u') et $A > 0$ lorsque $u' > \frac{-X}{Y}$;
- soit $Y < 0$ (la pente est négative et $A < 0$ lorsque $u' > \frac{-X}{Y}$)

Plus simplement,

- Si $u' > \frac{-X_{\pm}}{Y_{\pm}}$ alors $\text{sign}(A) = \text{sign}(Y)$
- Si $u' < \frac{-X_{\pm}}{Y_{\pm}}$ alors $\text{sign}(A) = -\text{sign}(Y)$

Nous pouvons donc différencier jusqu'à deux sous-régions d'intégration par domaine :

$$F_{\pm} = - \text{Sign}(Y_{\pm}) \left\{ \int_{-1}^{\frac{-X_{\pm}}{Y_{\pm}}} \frac{P_{\lambda}(u') du'}{\sqrt{A_{\pm}^2 - B^2}} - \int_{\frac{-X_{\pm}}{Y_{\pm}}}^{u'_0} \frac{P_{\lambda}(u') du'}{\sqrt{A_{\pm}^2 - B^2}} \right\}$$

Calcul analytique de l'intégration sur u' lorsque $\mu > 0$

Lorsque $\mu > 0$, il est encore possible de calculer l'intégrale sur u' analytiquement. En effet, les primitives :

$$F_\lambda^\mu = \int P_\lambda^\mu(u') \bar{V}_0 du'$$

sont encore connues analytiquement. Pour $V_1 = \frac{1}{B}(-4\pi\alpha - A\bar{V}_0)$, par exemple, nous avons :

$$F_\lambda^1 = \int \frac{1}{B}(-4\pi\alpha - (X + u'Y)V_0)P_{\lambda 1}(u')du'$$

Les $P_{\lambda 1}(u')$ sont proportionnels à $\sqrt{1-u'^2}$, facteur qui s'annule avec le même facteur du dénominateur $B = -2kk'\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-u'^2}$. L'intégration du premier terme de la somme est immédiate, celle de second terme en général analytique. Regardons l'expression de F_0^1 :

$$F_0^1(k, u, k') = 4\pi\alpha \left(-\frac{1}{2kk'\sqrt{1-u^2}} \int \frac{(X + u'Y)}{\sqrt{\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma' - i\epsilon}} du' \right)$$

La solution de cette intégrale est analytique. Les fonctions F_λ^1 sont données en annexe.

3.5.2 Méthode numérique de résolution.

Pour résoudre le système d'équations couplées (3.45), nous utilisons la méthode d'approximation des splines (voir l'annexe VI.1). En décomposant la fonction d'onde –ou la fonction de vertex– sur une base de *fonctions de splines*, il est possible de discrétiser le problème. Pour une valeur de μ donnée, la fonction de vertex s'écrit approximativement comme la somme suivante :

$$\Gamma_\lambda(k) = \sum_{j=0}^{2N+1} c_j^\lambda S_j(k)$$

Résoudre le systèmes d'équations (3.45) revient à chercher un vecteur (de dimension finie) contenant les coefficients de spline c_j . Au lieu de résoudre cette équation pour toutes les valeurs continues de k , la discrétisation restreint ces valeurs à un ensemble fini de points $\{\bar{k}_i\}$ nommés des *points de collocation*. Cet ensemble de points forment une *grille de collocation*. Dans le cadre de cette approximation l'équation pour les états liés s'écrit, pour un point \bar{k}_i donné, sous la forme suivante :

$$c_j^\lambda S_j(\bar{k}_i) = 4\pi \sum_{\lambda'} \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{\lambda\lambda'}(\bar{k}_i, k', M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} c_j^{\lambda'} S_j(k')$$

Il s'agit d'un ensemble d'équations couplées se réduisant à une équation matricielle aux valeurs propres :

$$A_{ij}^{\lambda\lambda'} c_j^{\lambda'} = \Lambda B_{ij}^{\lambda\lambda'} c_j^{\lambda'}$$

avec :

$$A_{ij} = S_j(\bar{k}_i) \delta_{\lambda\lambda'}$$

et :

$$B_{ij}^{\lambda\lambda'} = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{\lambda\lambda'}(\bar{k}_i, k', M^2)}{[M^2 - 4(\bar{k}'^2 + m^2)]} S_j(k')$$

Pour un couple (i, j) donné nous avons plusieurs valeurs possibles de (λ, λ') ; pour garder une forme matricielle, il suffit d'établir une bijection entre les entiers (i, λ) et un entier I , ainsi que pour (j, λ') et un entier J . Il est alors possible de construire des matrices $N_{eq} \times N_{eq}$ correspondant à $A_{ij}^{\lambda\lambda'}$ et $B_{ij}^{\lambda\lambda'}$, avec $N_{eq} = N_{col}(N + 1)N_a$, où N_{col} correspond au nombre de points de collocation par intervalle (en général, deux points), N au nombre de sous-intervalles de la grille et N_a au nombre des différentes composantes Γ_λ à prendre en compte dans ce calcul approché. Cette bijection permet de retrouver une équation matricielle de la forme :

$$A_{IJ}c_J = \Lambda B_{IJ}c_J$$

Nous pouvons résoudre l'équation aux valeurs propres et en utilisant la même bijection dans le sens inverse, reconstruire les vecteurs propres c_j^λ permettant d'obtenir les $\Gamma_\lambda(k)$. Il s'agit d'une méthode de résolution aux *canaux couplés*.

L'intégration sur k' est effectuée numériquement. D'après les propriétés du potentiel, la matrice $B_{ij}^{\lambda\lambda'}$ ne couple que les λ de même parité. La résolution numérique permet d'obtenir un ensemble de valeurs propres Λ_i pour une masse totale $M = 2m - B$ donnée. Dans le cas simple où il est possible de prendre en facteur la constante de couplage α (par exemple lors du calcul des états liés sans prise en compte de la self-énergie), l'on peut assimiler Λ à α . Une solution physique est trouvée lorsqu'au moins une valeur propre est réelle et positive. L'état fondamental est alors donné par la plus petite valeur propre positive. Lorsqu'il est impossible de factoriser la constante de couplage, la solution physique est obtenue quand la valeur propre Λ est égale à 1. Pour ce faire, il faut modifier les différents paramètres (soit la ou les constantes de couplage, soit l'énergie de liaison) pour obtenir ce résultat. En plus de la valeur propre recherchée, nous obtenons aussi les c_j^λ permettant de construire la fonction d'onde du système.

Malgré les simplifications réalisées, ce calcul nécessite de prendre en compte une infinité de couplages entre les ondes partielles donnés par $V_{\lambda\lambda'}$. Tous ces couplages n'auront cependant pas la même force. Une certaine stabilité des solutions après un nombre fini de couplages est envisageable. Les résultats obtenus sont présentés dans la section suivante.

3.6 Résultats à l'approximation *ladder*.

3.6.1 Onde S

La résolution idéale de l'équation pour l'onde S passerait par l'obtention d'un ensemble infini de fonctions de k , $\{\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{2n}, \dots\}$, à partir desquelles la fonction de vertex est construite :

$$\Gamma(k, u) = \sum_{\lambda=0,2,\dots,\infty} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \Gamma_\lambda(k) P_\lambda(u)$$

Il est possible de ranger les différents Γ_λ dans un vecteur, l'équation (3.33) s'écrivant sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \end{pmatrix}_k = \dots \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \begin{pmatrix} V_{00} & V_{02} & \dots \\ V_{20} & V_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}_{kk'} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \end{pmatrix}_{k'}$$

Lors de la résolution numérique de l'équation, il est impossible de calculer l'ensemble des Γ_λ . Il est nécessaire de se restreindre à un nombre fini de termes et d'approximer pour cela, la décomposition angulaire de $\Gamma(k, u)$ par une somme finie d'ondes partielles :

$$\Gamma_S(k, u) \approx \sum_{\lambda=0,2,\dots,2N} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \Gamma_\lambda(k) P_\lambda(u)$$

L'ensemble infini d'équations couplées se réduit alors à un système matriciel fini, le potentiel étant réduit à un nombre limité de termes $V_{\lambda\lambda'}$. Or tous les couplages $V_{\lambda\lambda'}$ n'ont certainement pas le même poids.

Énergies de liaison et constantes de couplage

La résolution de l'ensemble infini d'équations intégrales couplées permettrait d'obtenir les énergies de liaison «physiques» (ou indifféremment, les constantes de couplage) du système étudié.

Or la résolution des équations couplées «tronquées» permet de trouver une énergie de liaison (ou constante de couplage) qui ne correspond plus à la valeur physique du système, mais qui doit, lorsque le nombre de composantes Γ_λ est grand, tendre vers la valeur physique. Nous parlerons dans ce cas de *convergence*, même si le mot est peut-être abusif.

Regardons l'effet de cette troncation sur la constante de couplage α pour différentes énergies de liaison et masses μ de la particule d'échange. Nous fixerons par commodité la masse des particules ϕ à $m = 1$. Par la suite, toutes les énergies et impulsions sont données en unités de masse m . Limitons-nous à une, deux ou trois composantes Γ_λ prises en compte. Ces résultats sont montrés dans le tableau 3.1²⁰

Remarquons que pour n'importe quelle énergie de liaison et n'importe quel μ la constante de couplage varie très peu en fonction du nombre de composantes. Les constantes de couplage obtenues à partir de la troncation à la seule composante Γ_0 ont des différences de l'ordre du millièrme avec celles obtenues avec un nombre plus important de composantes. Au-delà de deux composantes, l'effet de la prise en compte d'une composante supplémentaire sur la valeur de α est en dessous de la précision montrée dans le tableau²¹. La prise en compte d'un nombre plus important de composantes ne semble en rien jouer sur la valeur de α . Nous retrouvons donc la valeur physique de la constante de couplage avec une précision de 10^{-4} avec seulement deux ondes partielles. Encore plus surprenant, la valeur physique est approchée avec une précision du millièrme avec le système tronqué à une seule composante.

20. Les paramètres du calcul numérique (grille, etc.) sont indiqués pour quelques exemples dans l'annexe VI.1.4

21. Ces résultats coïncident, avec une bonne précision, avec ceux montrés par Mangin-Brinet dans sa thèse.

B	μ	Γ_0	Γ_0, Γ_2	$\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_4$
0.01	1	2.983	2.980	2.980
	0.5	1.461	1.459	1.459
	0.15	0.5814	0.5809	0.5809
0.1	1	4.407	4.402	4.402
	0.5	2.572	2.569	2.569
	0.15	1.504	1.501	1.501
1	1	9.674	9.665	9.665
	0.5	7.159	7.151	7.151
	0.15	5.801	5.794	5.794
1.5	1	10.91	10.90	10.90
	0.5	8.285	8.278	8.278
	0.15	6.887	6.881	6.881
2	1	11.31	11.30	11.30
	0.5	8.653	8.646	8.646
	0.15	7.242	7.237	7.237

TAB. 3.1 – Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes dans le cas de l'onde S .

Ce résultat est remarquable. En effet, il est possible d'obtenir des énergies de liaison (ou des constantes de couplage) avec une excellente précision en réduisant le système d'équations couplées (3.45) en une seule équation intégrale à une dimension :

$$\Gamma_0(k) = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{00}(k, k', M^2)}{[M^2 - 4(k^2 + m^2)]} \Gamma_0(k') \quad (3.60)$$

Le noyau est réduit alors à un potentiel effectif V_{00} qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_{00}(k, k', M^2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int du du' d\varphi' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi} \int du d\varphi du' d\varphi' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \\ &= \int \frac{d\hat{k}}{4\pi} \frac{d\hat{k}'}{4\pi} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Pour des directions de \vec{k} et \vec{k}' fixées, l'intégration sur \hat{k} et \hat{k}' se traduit par l'intégration sur toutes les directions possibles de \hat{n} .

$$V_{00}(k, k', M^2) \sim \int d\hat{n} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

Cette expression correspond à une moyenne angulaire sur \hat{n} . Toute la physique du système semble contenue dans ce potentiel effectif obtenu en «moyennant» la dépendance en \hat{n} pour la faire disparaître. Cet effet de moyenne a été observé par Fuda en 1992 [32] dans le cadre d'un calcul de diffusion.

En ce qui concerne la fonction de vertex –ou de façon équivalente, la fonction d’onde– il est possible de se contenter de la première composante du développement :

$$\Gamma_S(k, u) \approx \sqrt{\frac{1}{2}} \Gamma_0(k) P_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_0(k)$$

Or Γ_0 s’obtient par l’intégration de $\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = \Gamma(k, u)$ sur u :

$$\Gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+1} du P_0(u) \Gamma(k, u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} du \Gamma(\vec{k}, \hat{n})$$

Norme de la fonction de vertex.

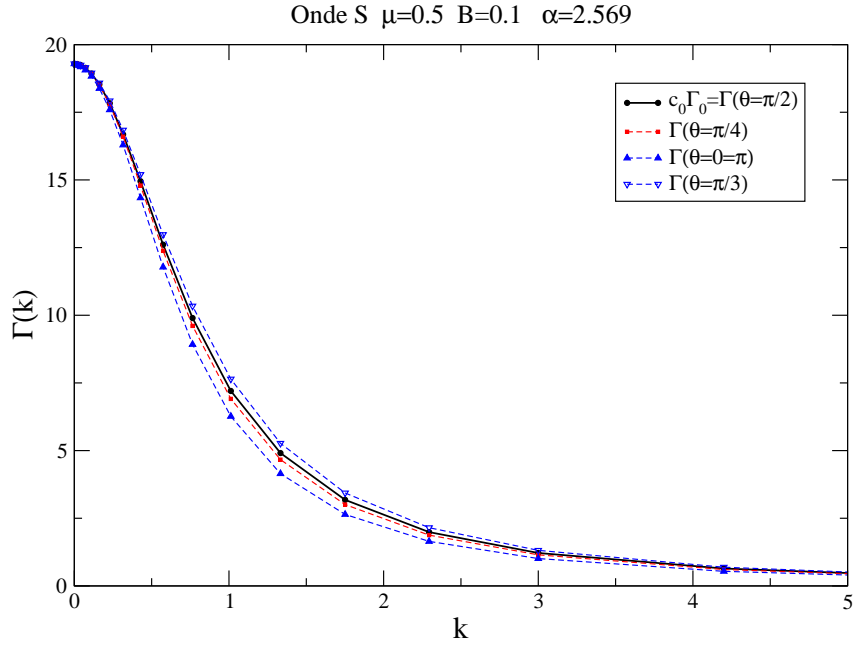


FIG. 3.10 – Onde S. Dépendance en θ de la fonction de vertex (calcul limité à trois ondes partielles). Le facteur $c_\lambda = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}}$ vient de la décomposition angulaire choisie.

Regardons quelle est la dépendance en θ de la $\Gamma(k, \theta)$. La figure (3.10) montre que cette dépendance existe, bien que la constante de couplage pour une énergie de liaison donnée ne dépende pas de cet angle. La dépendance est très faible pour les petites et les grandes valeurs de k , mais même si elle reste faible, elle n’est plus négligeable pour certaines valeurs intermédiaires de k , par exemple $k = 1.5$.

Or la fonction de vertex –aussi bien que la fonction d’onde– n’est pas une observable. Il est plus intéressant de regarder sa norme. En effet, normalisons la fonction de vertex totale par la relation :

$$\frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\epsilon_k} |\Psi(\vec{k}, \hat{n})|^2 = \frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\epsilon_k} \frac{|\Gamma(\vec{k}, \hat{n})|^2}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2} = 1$$

D'après la décomposition de Γ en ondes partielles et la normalisation de polynômes de Legendre :

$$\Gamma(k, u) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\lambda + 1}{2}} P_{\lambda}(u) \Gamma_{\lambda}(k)$$

la normalisation devient :

$$2\pi \frac{m}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int \frac{k^2 dk}{\epsilon_k} \frac{|\Gamma_{\lambda}(k)|^2}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2} = 1 \quad (3.62)$$

Regardons, pour différentes valeurs de B et μ , la contribution de chaque onde partielle à la normalisation globale. Notons que dans le tableau (3.2), la contribution essen-

μ	B	α	C_{Γ_0}	C_{Γ_2}	C_{Γ_4}
0.15	0.01	0.581	0.9998	.2105E - 03	.2382E - 05
	0.1	1.501	0.9990	.9756E - 03	.4225E - 05
	0.5	3.892	0.9986	.1386E - 02	.2265E - 06
0.25	0.01	0.815	0.9998	.1837E - 03	.2245E - 05
	0.1	1.783	0.9992	.8055E - 03	.2952E - 05
	0.5	4.209	0.9987	.1275E - 02	.1137E - 06
0.5	0.01	1.459	0.9999	.1399E - 03	.1720E - 05
	0.1	2.569	0.9995	.5470E - 03	.1426E - 05
	0.5	5.161	0.9990	.9997E - 03	.3005E - 06

TAB. 3.2 – Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas d'un état S , pour un calcul limité à trois ondes partielles.

tielle à la norme de la fonction de vertex est donnée par la composante Γ_0 , à au moins 99,9%.

Remarquons que bien que $\Gamma(k, u)$ dépende de la valeur de u , donc de la direction de \hat{n} , cette dépendance n'a aucune incidence lors du calcul des énergies de liaison (ou de α). Pour connaître la dépendance angulaire de la fonction de vertex, la restriction du développement au seul premier terme est insuffisante. Remarquons néanmoins que l'essentiel de la dépendance angulaire sera donnée par les premiers termes du développement.

$$\sqrt{2} \frac{\Gamma_S(k, u)}{\Gamma_0(k)} \approx 1 + \sqrt{5} P_2(u) \frac{\Gamma_2(k)}{\Gamma_0(k)} + \sqrt{9} P_4(u) \frac{\Gamma_4(k)}{\Gamma_0(k)} + \dots + \sqrt{4n+1} P_{2n}(u) \frac{\Gamma_{2n}(k)}{\Gamma_0(k)}$$

En effet les $\Gamma_{\lambda=2,4,\dots}(k)$ sont très faibles en comparaison avec $\Gamma_0(k)$, d'autant plus que λ est grand, tel qu'il est montré dans la figure (3.11).

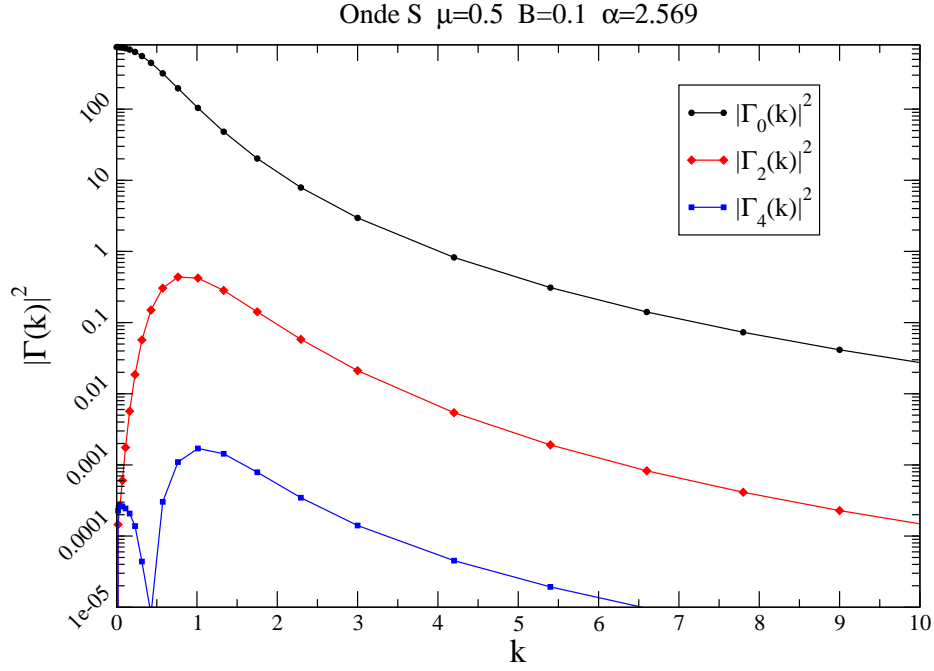


FIG. 3.11 – *Module de la fonction de vertex pour l'état S. Contribution des ondes partielles*

3.6.2 Onde P.

Regardons maintenant les résultats obtenus pour l'onde P . Nous trouvons deux solutions, chacune étant un état propre de l'opérateur \hat{A}^2 avec la valeur propre $a = \mu = 0, \pm 1$. Nous les noterons P_0 et P_1 respectivement. Regardons les constantes de couplage α correspondant à une énergie donnée pour ces deux états, pour différentes masses échangées. Ces résultats sont inscrits dans le tableau (3.3).

Comme dans le cas de l'onde S , les valeurs de la constante de couplage calculées avec un nombre limité N de composantes Γ_λ ne varient pas de façon significative dès que $N > 2$. Nous pouvons assimiler la valeur obtenue avec trois composantes à la valeur «physique» correspondant au calcul avec une infinité de couplages. Les valeurs «partielles» –c'est-à-dire, calculées avec un nombre limité de composantes– approchent très vite de la valeur physique. Par abus de langage nous dirons qu'elles convergent très vite vers cette valeur. Cette convergence est légèrement moins bonne que pour l'onde S –voir tableau (3.5)– mais l'écart entre le résultat obtenu en limitant le développement à un seul terme et celui correspondant aux trois premiers termes est, au pire, de l'ordre de 1%.

Nous retrouvons encore l'effet de «moyenne» observé dans le cas de l'onde S . Ici, il suffira d'approximer le potentiel par un potentiel effectif V_{11}^μ correspondant au premier terme de la décomposition en ondes partielles de l'équation pour les états liés :

$$\Gamma_1^\mu(k) = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{11}^\mu(k, k', M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} \Gamma_1^\mu(k')$$

B	μ	Onde	Γ_1	Γ_1, Γ_3	$\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$
0.01	0.15	P_0	2.068	2.054	2.053
		P_1	2.422	2.416	2.415
	0.5	P_0	6.808	6.744	6.743
		P_1	9.379	9.345	9.345
0.1	0.15	P_0	4.001	3.958	3.957
		P_1	5.266	5.240	5.240
	0.5	P_0	8.737	8.655	8.655
		P_1	12.96	12.91	12.91
1	0.15	P_0	12.26	12.17	12.17
		P_1	20.33	20.24	20.24
	0.5	P_0	17.20	17.09	17.09
		P_1	30.44	30.32	30.32

TAB. 3.3 – Onde P : Valeur de α en fonction du nombre d'ondes partielles pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes

Lorsque l'indice $\mu = 0$, le potentiel V_{11}^0 est donné par :

$$\begin{aligned}
 V_{11}^0 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{2} \int du du' d\varphi' uu' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{2} \int du du' d\varphi' (\hat{n} \cdot \hat{k})(\hat{n} \cdot \hat{k}') V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \\
 V_{11}^0 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4\pi} \int d\hat{k} d\hat{k}' (\hat{n} \cdot \hat{k})(\hat{n} \cdot \hat{k}') V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)
 \end{aligned}$$

De même, lorsque l'indice $\mu = 1$ nous aurons²² :

$$\begin{aligned}
 V_{11}^1 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4} \int du du' d\varphi' \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-u'^2} V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \cos \bar{\varphi} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4} \int du du' d\varphi' [(\hat{n} \times \hat{k}) \cdot (\hat{n} \times \hat{k}')] V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \\
 V_{11}^1 &= \frac{1}{4\pi} \frac{3}{8\pi} \int d\hat{k} d\hat{k}' [(\hat{n} \times \hat{k}) \cdot (\hat{n} \times \hat{k}')] V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)
 \end{aligned}$$

Lorsque \vec{k} et \vec{k}' sont fixés, les intégrations angulaires équivalent à faire varier la direction de \hat{n} . Nous aurons alors les expressions suivantes pour les potentiels effectifs «moyennés» :

$$V_{11}^0 \sim \int d\hat{n} (\hat{n} \cdot \hat{k})(\hat{n} \cdot \hat{k}') V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \quad ; \quad V_{11}^1 \sim \int d\hat{n} [(\hat{n} \times \hat{k}) \cdot (\hat{n} \times \hat{k}')] V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

Les potentiels V_{11}^0 et V_{11}^1 sont donc des projections des potentiels, «moyennés» sur \hat{n} , d'abord selon la direction parallèle à \hat{n} pour V_{11}^0 , ensuite dans le plan perpendiculaire à ce vecteur pour V_{11}^1 .

22. Nous exprimons d'abord $(\hat{n} \times \hat{k})$ et $(\hat{n} \times \hat{k}')$ lorsque \hat{n} est parallèle à l'axe z . Le produit scalaire des deux termes vaut $\sin \theta \sin \theta' \cos \bar{\varphi}$ et est invariant quelque soit la direction de \hat{n} , $\bar{\varphi}$ étant alors l'angle séparant les projections des \vec{k} et \vec{k}' sur le plan perpendiculaire à \hat{n} .

Regardons aussi la fonction de vertex. Limiter le développement de Γ au premier terme permet de factoriser la dépendance angulaire. La dépendance en θ apparaît sous forme d'un cosinus pour l'onde P_0 et comme un sinus pour P_1 . La dépendance en φ se factorise aussi comme une exponentielle pour P_1 , cette factorisation pouvant aussi se faire lors de l'ajout d'autres termes au développement. En effet il est toujours possible, quelque soit λ , de factoriser u des $P_{\lambda 0}(u)$ et $\sqrt{1-u^2}$ des $P_{\lambda 1}(u, \varphi)$. Quant à la dépendance en φ , elle provient toujours de l'exponentielle et peut être factorisée. Or les $\Gamma_{\lambda\mu}|_{\lambda>1} \ll \Gamma_{1\mu}$ (voir la figure (3.12)), donc ils contribuent peu à la norme à la dépendance angulaire totale. La première composante de la fonction de vertex est donnée par :

$$\Gamma_{10} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\cos \theta \Gamma_{P_0}(k, \theta))$$

$$\Gamma_{11} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (e^{i\varphi} \sin \theta \Gamma_{P_1}(k, \theta, \varphi))$$

La composante Γ_{10} sera considérée comme la moyenne sur θ de la projection sur \hat{n} du vecteur d'état (d'où le cosinus). Quand à Γ_{11} , il s'agit de la moyenne de la projection du vecteur d'état sur le plan perpendiculaire à \hat{n} , avec l'exponentielle qui sépare les deux projections possibles dans ce plan.

Normalisation

Comme pour l'onde S , la normalisation de la fonction de vertex est donnée par :

$$\frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\epsilon_k} |\Psi(\vec{k}, \hat{n})|^2 = \frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\epsilon_k} \frac{|\Gamma(\vec{k}, \hat{n})|^2}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2} = 1$$

D'après le choix de normalisation des harmoniques sphériques, nous avons :

$$\frac{m}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda\mu} \int \frac{k^2 dk}{\epsilon_k} \frac{|\Gamma_{\lambda\mu}(k)|^2}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2} = 1 \quad (3.63)$$

Le tableau (3.4) montre que la première composante $\Gamma_{1\mu}$ donne la contribution essentielle à la norme de la fonction de vertex.

Masse physique

Les deux résultats obtenus, notés P_0 et P_1 sont des états propres de l'opérateur \hat{A}^2 . Or ils ne peuvent être en même temps états propres de l'opérateur \hat{S}^3 , qui ne commute pas avec \hat{A}^2 . Ces états ne sont donc pas une solution physique. Pour construire une solution physique, nous allons suivre une démarche développée dans [13, 20] et l'adapter à notre méthode de résolution par l'intermédiaire d'une décomposition angulaire des vecteurs d'état. Une façon d'obtenir une solution physique approchée est de construire un vecteur d'état physique Ψ_{phys} comme combinaison linéaire des solutions Γ_{P_0} et Γ_{P_1} .

$$\Gamma_{phys} = c_0 \Gamma_{P_0} + c_1 \Gamma_{P_1}$$

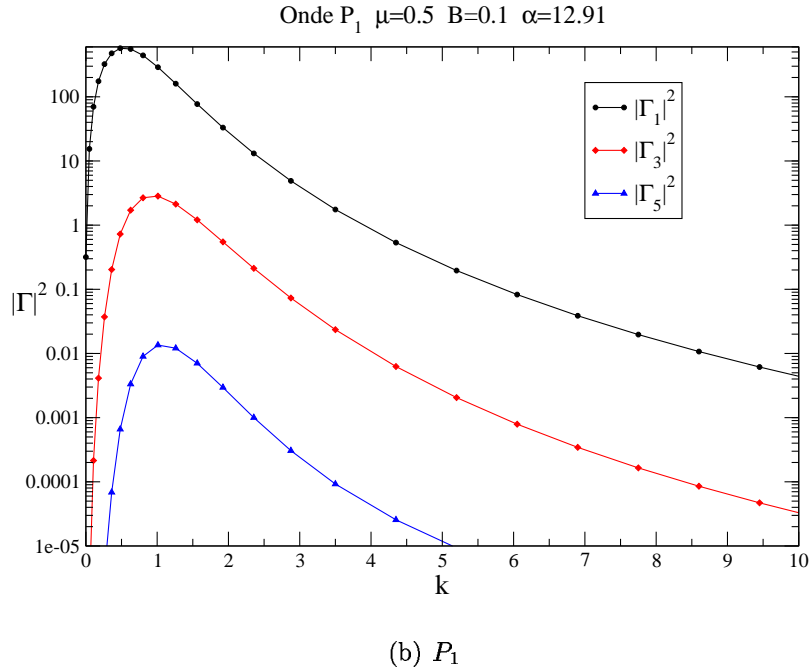
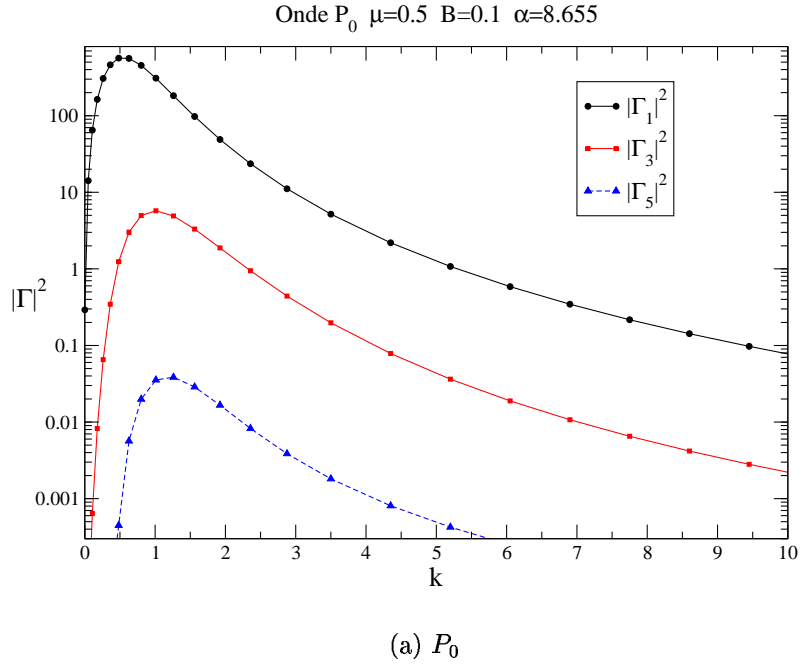


FIG. 3.12 – *Module de la fonction de vertex pour l'onde P ($\mu = 0.5, B = 0.1$). Contribution des trois premières ondes partielles : Γ_1 (en noir), Γ_3 (en rouge) et Γ_5 (en bleu)*

μ	B	Onde	α	C_{Γ_1}	C_{Γ_3}	C_{Γ_5}
0.15	0.01	P_0	2.053	0.997	$0.278E-02$	$0.530E-04$
		P_1	2.415	0.999	$0.116E-02$	$0.130E-04$
	0.1	P_0	3.957	0.992	$0.821E-02$	$0.102E-03$
		P_1	5.240	0.996	$0.430E-02$	$0.365E-04$
	0.5	P_0	8.658	0.989	$0.110E-01$	$0.357E-04$
		P_1	13.42	0.993	$0.721E-02$	$0.259E-04$
0.5	0.01	P_0	6.743	0.994	$0.322E-02$	$0.270E-02$
		P_1	9.345	0.998	$0.127E-02$	$0.955E-03$
	0.1	P_0	8.654	0.994	$0.557E-02$	$0.258E-04$
		P_1	12.91	0.997	$0.281E-02$	$0.959E-05$
	0.5	P_0	13.49	0.993	$0.742E-02$	$0.135E-05$
		P_1	22.62	0.995	$0.490E-02$	$0.303E-05$

TAB. 3.4 – Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas de l'onde P , pour un calcul limité à trois ondes partielles.

La condition de normalisation impose la relation $c_0^2 + c_1^2 = 1$ entre les coefficients. La masse totale physique sera donnée par :

$$M_{phys}^2 = c_0^2 M_{P_0}^2 + c_1^2 M_{P_1}^2$$

Si nous nous limitons au premier terme du développement (3.37), la fonction de vertex physique s'écrira sous la forme

$$\Gamma_{phys}(k, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[c_0 \cos \theta \Gamma_{10}(k) - \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \sin \theta e^{i\varphi} \Gamma_{11}(k) \right]$$

Lorsque $k \rightarrow 0$, la fonction de vertex est proportionnelle à k et ne doit plus dépendre de \hat{n} , donc de θ . Sa dérivée par rapport à cet angle doit être nulle. En supposant que c_0, c_1 ne dépendent pas de θ , la dérivée de la fonction de vertex physique en fonction de θ sera donnée par :

$$\left. \frac{\partial \Gamma_{phys}(k, \theta, \varphi)}{\partial \theta} \right|_{k \rightarrow 0} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[c_0 \sin \theta \Gamma_{10}(k) + \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \cos \theta e^{i\varphi} \Gamma_{11}(k) \right]_{k \rightarrow 0} = 0$$

En posant $h = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-e^{i\varphi} \Gamma_{11}(k)}{\tan \theta \Gamma_{10}(k)}$ et en utilisant la condition de normalisation, les coefficients c_0 et c_1 auront pour expression :

$$c_0 = \frac{h}{\sqrt{2+h^2}} \quad ; \quad c_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+h^2}} \quad (3.64)$$

Pour comparer ces coefficients avec ceux calculés dans [13, 20], revenons à l'expression donnée par (3.46) et écrivons le vecteur d'état «physique» (pour une parité négative) sous la forme suivante :

$$\Psi_{phys} = c_0 \left\{ 3(\hat{n} \cdot \hat{k}) \hat{n} g_0^-(k, u) \right\} + c_1 \left\{ \frac{3}{2} \sqrt{2} (\hat{k} - (\hat{n} \cdot \hat{k}) \hat{n}) g_1^-(k, u) \right\}$$

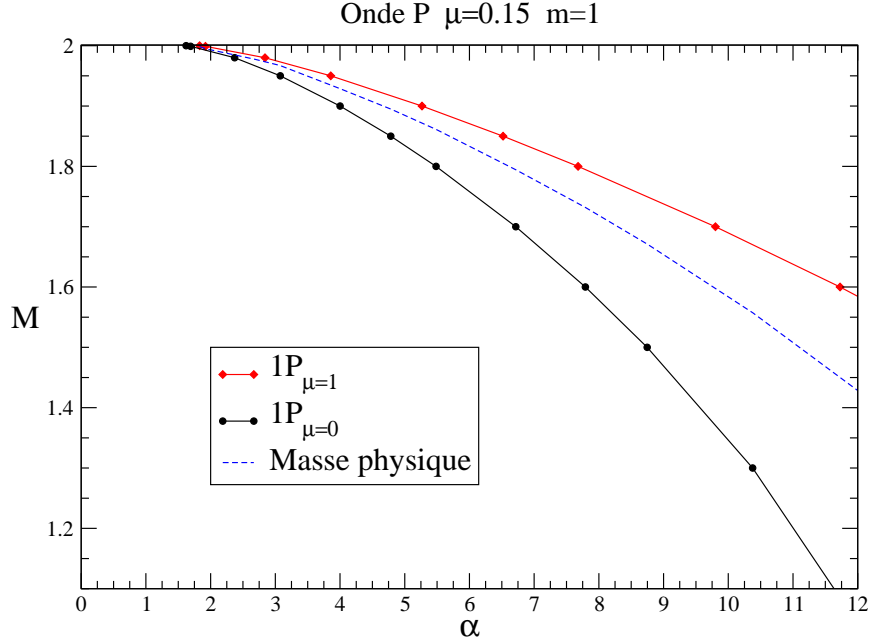


FIG. 3.13 – Onde P : On trouve deux solutions non physiques. La masse physique est obtenue par la relation $M^2 = c_0^2 M_0^2 + c_1^2 M_1^2$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \hat{k} g_1^-(k, u) c_1 + 3 \left(g_0^-(k, u) c_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} g_1^-(k, u) c_1 \right) u \hat{n}$$

Annuler la dépendance en \hat{n} lorsque $k \rightarrow 0$ conduit à fixer des conditions sur les valeurs des coefficients c_0 et c_1 :

$$c_0 = \frac{h_1}{\sqrt{2 + h_1^2}} \quad ; \quad c_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + h_1^2}}$$

avec $h_1 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g_1^-(k, u)}{g_0^-(k, u)}$. Cette expression est à comparer à celle donnée dans (3.64), ce qui permet d'assimiler h à h_1 . Dans la limite non relativiste $B \ll m$, nous avons $g_0^-(k, u) = g_1^-(k, u)$, donc $h = 1$. Dans ce cas, les coefficients deviennent :

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad ; \quad c_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ces valeurs varient très faiblement, même pour des énergies de liaison importantes [13, 20]. Nous prendrons ces valeurs pour obtenir la masse physique, comme il est montré dans la figure (3.13).

3.6.3 Dernières remarques concernant l'approximation *ladder*.

Tant pour l'onde S que pour l'onde P il existe une convergence remarquablement rapide lors de la prise en compte de termes supplémentaires de la décomposition angulaire. La restriction au premier terme du développement donne un résultat contribuant à au moins 99,8% de la norme de la fonction d'onde et permet d'obtenir les constantes de couplage correspondant à une énergie de liaison avec une précision de 1%, même pour des grandes énergies de liaison.

μ	B	$\Delta_S(\%)$	$\Delta_{P_0}(\%)$	$\Delta_{P_1}(\%)$
0.15	0.01	0.17	0.73	0.29
	0.1	0.20	1.10	0.50
	1	0.17	0.74	0.44
0.5	0.01	< 0.01	0.96	0.36
	0.1	0.12	0.96	0.39
	1	0.13	0.64	0.40

TAB. 3.5 – Convergence ondes S et P : Écart $\Delta = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3}$ entre la constante de couplage calculée avec une seule onde partielle et trois ondes partielles.

Rôle physique de \hat{n}

Comme nous l'avons vu, la décomposition des solutions de l'équation des états liés sur une base d'harmoniques sphériques conduit à un système d'équations intégrales couplées (3.45), reliant les différents $\Gamma_\lambda(k)$ avec tous les autres. Chaque intégration est unidimensionnelle. La résolution numérique de l'équation (3.45) revient à obtenir les valeurs propres d'une équation matricielle aux valeurs propres. Il est possible alors d'obtenir l'énergie de liaison correspondant à une constante de couplage donnée, ou inversement, la constante de couplage correspondant à une énergie de liaison donnée.

Une remarque intéressante à faire en regardant cette équation est qu'elle ne dépend pas explicitement de $u = \hat{k} \cdot \hat{n}$. Le calcul des énergies de liaison –ou de la constante de couplage– sera donc indépendant de la valeur de u . Ceci n'est pas évident en partant de l'équation (3.14) mais ne doit pas nous étonner. En effet, le couple (α, B) constitue une caractéristique physique du système, l'énergie de liaison étant une observable. Or physiquement, la direction du front de lumière ne doit pas avoir d'incidence réelle sur des quantités mesurables, car elle n'est introduite que dans un formalisme particulier. Elle n'apparaît pas dans les autres dynamiques, comme par exemple le formalisme à temps égaux, et bien qu'il n'y ait pas –à l'heure actuelle– de démonstration formelle de l'équivalence des différentes formes dynamiques, cette équivalence est généralement admise, car le contraire reviendrait à introduire une direction privilégiée de l'espace-temps.

Lors d'une résolution «complète» de la LFD, c'est-à-dire, lorsque aucune approximation n'est faite et où aucun diagramme régissant l'interaction n'est négligé, on s'attendrait à voir cette dépendance disparaître, à la différence de toute résolution approximative, comme par exemple l'approximation *ladder*. Or nous observons dans cette approximation que les propriétés physiques d'un système lié à deux particules dépendent très peu de la direction du front de lumière, le potentiel pouvant être approché avec une très bonne

approximation par un potentiel «effectif» équivalent à une valeur moyenne sur toutes les directions du front de lumière du potentiel initial. Une question intéressante est de savoir si cette faible dépendance est «accidentelle» et due uniquement à cette approximation particulière, ou si – au contraire – elle est plus profonde et provient des caractéristiques du couplage scalaire.

Par la suite, nous ajouterons à l'approximation *ladder* la prise en compte de la self-énergie. Outre l'intérêt de cette étude par elle-même, nous chercherons à savoir si l'effet de «moyenne» en \hat{n} est encore présent.

3.7 Au-delà de l'approximation *ladder* : Prise en compte de la Self-énergie.

Le noyau correspondant à l'approximation *ladder* est proportionnel à g^2 . Il s'agit du noyau à l'ordre le plus bas en g pouvant décrire l'interaction entre deux particules. Il existe néanmoins des processus de même ordre en g qui sont négligés dans cette approximation. Il s'agit en effet des processus où la particule interagit avec elle-même, c'est-à-dire des processus de self-énergie.

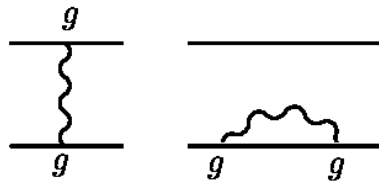


FIG. 3.14 – Diagrammes élémentaires à l'ordre le plus bas correspondant à l'approximation *ladder* (gauche) et à la self-énergie (droite)

L'effet de ces processus peut être très important et les négliger peut avoir une incidence notable sur le calcul des observables physiques. En effet, il sera montré dans le chapitre suivant que la seule approximation *ladder* est insuffisante pour traiter correctement les processus de diffusion inélastique, car la restriction à cette approximation viole l'unitarité de la matrice S . La prise en compte de la self-énergie permet alors de la rétablir. Il s'agit d'une des motivations majeures pour cette étude de la self-énergie.

En ce qui concerne le calcul des états liés, nous nous attendons *a priori* à ce que la prise en compte de la self-énergie modifie sensiblement les résultats obtenus à l'approximation *ladder*. Nous verrons par la suite que l'extension à l'approximation *ladder*+*self-énergie* conduit non seulement à des modifications quantitatives des résultats (par un effet répulsif), mais aussi à des changements qualitatifs qui modifient de manière radicale la physique des systèmes étudiés.

Par ailleurs, cette extension permet aussi de donner des éléments de réponse à la question de savoir si le fait que le système étudié puisse être très bien approximé par un potentiel effectif «moyenné» sur la direction du front de lumière, est, oui ou non, une caractéristique de la seule approximation *ladder*.

3.7.1 Fonction de Green à deux corps G . Effet de la self-énergie.

Pour calculer la contribution de la self-énergie, regardons l'effet que produit l'auto-interaction d'une particule de masse m par l'intermédiaire du boson d'échange de masse μ . Comme tous les diagrammes d'excitation du vide sont interdits dans la LFD, seuls seront pris en compte les contributions de la self-énergie sur les lignes internes, c'est-à-dire, reliant deux interactions de type *ladder*. Ceci a pour effet de modifier les propagateurs (fonction de Green) à deux corps reliant les deux interactions.

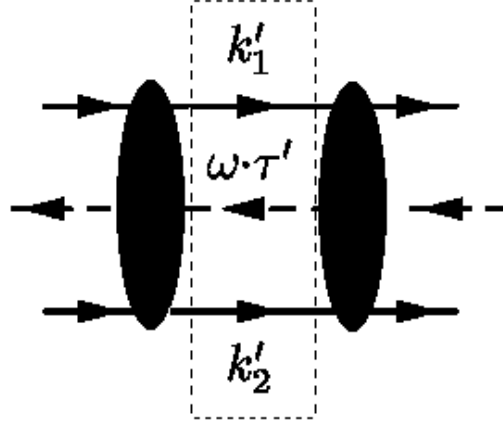


FIG. 3.15 – Diagramme représentant le propagateur G_0 (encadré). p est l'impulsion totale du système.

Propagateur libre G_0 .

Partons du propagateur libre à deux corps indiqué dans la partie encadrée du diagramme (3.15). Les deux ellipses sombres représentent éventuellement l'interaction, qui n'est pas considérée ici. Les règles diagrammatiques de la CLFD traduisent ce diagramme par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} G_0 &= \int \theta(\omega \cdot k'_1) \delta(k'^2_1 - m^2) d^4 k'_1 \theta(\omega \cdot k'_2) \delta(k'^2_2 - m^2) d^4 k'_2 \delta^{(4)}(k'_1 + k'_2 - \omega \tau' - p) \frac{d\tau'}{\tau' - i0} \\ &= \int \frac{d\tau'}{\tau' - i0} \delta^{(4)}(k'_1 + k'_2 - \omega \tau' - p) \frac{d^3 k'_1}{\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{\varepsilon_{k'_2}} \end{aligned}$$

L'expression $\theta(\omega \cdot k'_1) \delta(k'^2_1 - m^2) d^4 k'_1$ et son équivalente en fonction de k'_2 correspondent aux lignes continues²³, le trait discontinu se traduit par le terme $\frac{d\tau'}{\tau' - i0}$. La fonction $\delta^{(4)}(k'_1 + k'_2 - \omega \tau' - p)$ traduit la loi de conservation des impulsions, p étant toujours l'impulsion totale du système. Notons $\mathcal{P} \equiv p + \omega \tau'$. En élevant ce terme au carré et en introduisant $\mathcal{M}^2 = \mathcal{P}^2$, le paramètre τ s'exprime par :

$$\tau = \frac{\mathcal{M}^2 - M^2}{2\omega \cdot p}$$

or $\mathcal{M} = 2\varepsilon_k$ donne $\mathcal{M}^2 = 4(\vec{k}^2 + m^2)$, d'où :

$$\frac{d\tau'}{\tau' - i0} = \frac{8k' dk'}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0}$$

En utilisant l'expression du volume de phase de deux particules de masses identiques donnée dans l'annexe (II), nous retrouvons l'expression du propagateur G_0 libre, il apparaît bien dans l'équation (3.14) :

$$G_0 \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} = \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} \quad (3.65)$$

23. Les fonctions δ sont écrites explicitement pour rappeler que les particules sont sur couche de masse.

Propagateur «habillé» G .

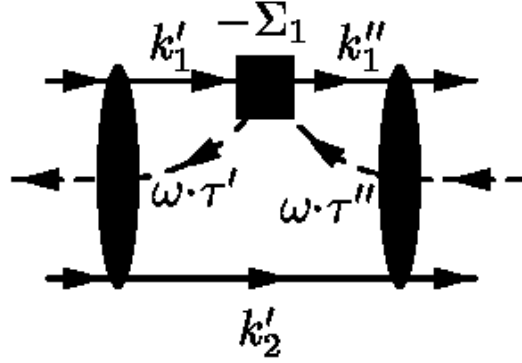


FIG. 3.16 – Diagramme représentant $G_0(-\Sigma_1)G_0$.

La self-énergie intervient en modifiant de façon itérative le propagateur libre G_0 par un processus d'auto-interaction, représenté dans la figure (3.17). Le propagateur modifié G apparaît comme la somme de toutes ces contributions. Il résulte une série infinie de termes, dont l'expression est donnée par²⁴ :

$$G = G_0 + G_0(-\Sigma_1 - \Sigma_2)G_0 + G_0(-\Sigma_1 - \Sigma_2)G_0(-\Sigma_1 - \Sigma_2)G_0 + \dots \quad (3.66)$$

où Σ_1 et Σ_2 représentent les contributions de self-énergie des deux particules d'impulsions respectives p_1 et p_2 .

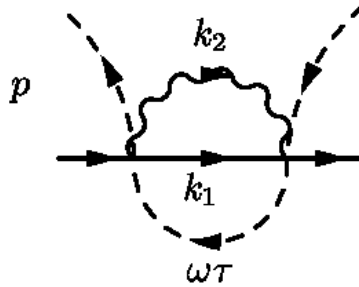


FIG. 3.17 – Self-énergie : diagramme correspondant à $-\Sigma(p^2)$. p est l'impulsion totale.

Le terme $G_0(-\Sigma_1)G_0$ est représenté dans le diagramme (3.16). Il se traduit à l'aide des règles diagrammatiques par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} G_0(-\Sigma_1)G_0 &= \int \theta(\omega \cdot k''_1) \delta(k''_1{}^2 - m^2) d^4 k''_1 (-\Sigma(k''_1 - \omega \tau'')) \frac{d\tau''}{\tau'' - i0} \delta^{(4)}(k''_1 - \omega \tau'' - k'_1 + \omega \tau') \\ &\times \theta(\omega \cdot k'_1) \delta(k'_1{}^2 - m^2) d^4 k'_1 \theta(\omega \cdot k'_2) \delta(k'_2{}^2 - m^2) d^4 k'_2 \delta^{(4)}(k'_1 + k'_2 - \omega \tau' - p) \frac{d\tau'}{\tau' - i0} \end{aligned}$$

²⁴. Le signe $(-)$ devant les fonctions Σ est purement arbitraire et est introduit pour se conformer à l'usage.

3.7. AU-DELÀ DE L'APPROXIMATION *LADDER* : PRISE EN COMPTE DE LA SELF-ÉNERGIE.

$$\begin{aligned}
&= \int \delta(2\omega \cdot k'_1(\tau'' - \tau')) \frac{d\tau''}{\tau'' - i0} (-\Sigma(k''_1 - \omega\tau'')) \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} \\
G_0(-\Sigma_1)G_0 &= \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{-\Sigma(k'_1 - \omega\tau')}{x} \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

ainsi que le terme $G_0(-\Sigma_2)G_0$:

$$G_0(-\Sigma_2)G_0 = \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{-\Sigma(k'_2 - \omega\tau')}{(1 - x')} \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i0} \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}}$$

Leur somme donne²⁵ :

$$G \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} = \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 + \frac{1}{x'}\Sigma'_1 + \frac{1}{1-x'}\Sigma'_2 - i0} \frac{d^3 k'}{\varepsilon_{k'}} \quad (3.68)$$

Calcul de la fonction de self-énergie renormalisée $\Sigma_R(p^2)$.

Nous sommes partis d'un propagateur à deux corps «nu». L'impulsion totale p correspondante vérifie la condition *sur-couche* $p^2 = m^2$. Lorsque nous prenons en compte la contribution de la self-énergie, l'imposition de cette condition nécessite une renormalisation de la masse par l'introduction d'un contre-terme dans la densité lagrangienne. Bernard, Cousin, Karmanov et Mathiot ont traité ce problème dans [33]. Dans ce papier, ils calculent le vecteur d'état renormalisé pour un système à deux particules scalaires, dans le cadre du formalisme covariant de la LFD. Nous utilisons ici leur résultat à l'approximation où le vecteur d'état ne contient qu'une particule dans l'état intermédiaire. Dans ce cas, nous devons introduire le contre-terme :

$$\mathcal{L}_m = \delta m^2 \phi^2 \quad \text{avec} \quad \delta m^2 = -\Sigma(p^2 = m^2)$$

permettant de renormaliser la fonction $\Sigma(p)$ de telle sorte que $\Sigma_R(m^2) = 0$. Cette renormalisation est nécessaire car elle permet de régulariser le calcul de $\Sigma(p)$, qui est divergent. Exprimons le propagateur «habillé» en fonction de cette fonction. La fonction Σ non renormalisée est représentée graphiquement dans la figure (3.17). Son expression intégrale est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Sigma(p^2) &= -g^2 \int \theta(\omega \cdot k_1) \delta(k_1^2 - m^2) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^3} \theta(\omega \cdot k_2) \delta(k_2^2 - \mu^2) \\
&\quad \times \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \omega\tau - p) d^4 k_2 \frac{d\tau}{\tau - i0} \\
&= \frac{-4\pi\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_1}{\varepsilon_{k_1}} \frac{d^3 k_2}{\varepsilon_{k_2}} \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \omega\tau - p) d^4 k_2 \frac{d\tau}{\tau - i0} \quad (3.69)
\end{aligned}$$

25. Une telle série infinie peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned}
G &= G_0 + G_0 f G_0 + G_0 f G_0 f G_0 + \dots \\
&= G_0 + G_0 f G \\
(1 - G_0 f)G &= G_0 \\
G &= \frac{G_0}{1 - G_0 f} = \frac{1}{G_0^{-1} - f}
\end{aligned}$$

Nous avons fait apparaître $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$. Le signe $(-)$ est introduit arbitrairement pour retrouver les expressions usuellement utilisées dans la littérature. La fonction de Dirac $\delta^{(4)}(k_1 + k_2 - \omega\tau - p)d^4k_2$ exprime explicitement la loi de conservation des impulsions. Cette intégrale peut s'exprimer aussi à l'aide des variables x et R_\perp sous la forme suivante :

$$\Sigma(p^2) = -\frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{s - p^2 - i\epsilon} \frac{d^2 R_\perp dx}{2x(1-x)}$$

avec :

$$s = (k_1 + k_2)^2 = \frac{R_\perp^2 + m^2}{x} + \frac{R_\perp^2 + \mu^2}{1-x}$$

Cette expression est divergente. La régularisation de cette intégrale se fait par soustraction, selon la procédure de renormalisation mentionnée précédemment. L'expression de la self-énergie renormalisée est donnée par :

$$\Sigma_R(p^2) = \Sigma(p^2) - \Sigma(p^2 = m^2)$$

Pour calculer la valeur de $\Sigma_R(p^2)$, nous allons utiliser l'expression du volume de phase à deux particules de masses m et μ :

$$V_2 = \int d^4(k_1 - k_2 - \mathcal{P}) \frac{d^3k_1}{2\sqrt{k_1^2 + m^2}} \frac{d^3k_2}{2\sqrt{k_2^2 + \mu^2}} = \frac{\pi}{2\mathcal{M}^2} \sqrt{\mathcal{M}^2 - (m + \mu)^2} \sqrt{\mathcal{M}^2 - (m - \mu)^2}$$

avec $\mathcal{M}^2 = P^2$. Cette expression apparaît dans l'intégrale (3.69) avec $\mathcal{P} = p + \omega\tau$. Il est possible de relier τ à \mathcal{M} par l'expression :

$$\tau = \frac{\mathcal{M}^2 - p^2}{2\omega \cdot p}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 - p^2}$$

nous obtenons l'expression renormalisée de Σ_R . Elle s'exprime par :

$$\Sigma_R(p^2) = \frac{-\alpha}{\pi} (p^2 - m^2) \int_{m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\mathcal{M}^2 - (m + \mu)^2} \sqrt{\mathcal{M}^2 - (m - \mu)^2}}{\mathcal{M}^2 (\mathcal{M}^2 - p^2) (\mathcal{M}^2 - m^2)} d\mathcal{M}^2 \quad (3.70)$$

Cette intégrale peut être calculée analytiquement. Elle dépend de la valeur de p^2 . Nous donnons ici son expression explicite pour toutes les valeurs de p^2 , car ces expressions seront utiles aussi dans le cas de la diffusion.

Si $-\infty < p^2 < (m - \mu)^2$, l'expression de $\Sigma_R(p^2)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \Sigma_R(p^2) = & -\frac{\alpha}{\pi p^2} \left\{ p^2 \mu \sqrt{4m^2 - \mu^2} \arctan \frac{\sqrt{4m^2 - \mu^2}}{\mu} \right. \\ & + (p^2 - m^2)(m^2 - \mu^2) \log \frac{m}{\mu} - m^2 \sqrt{[(m - \mu)^2 - p^2][(m + \mu)^2 - p^2]} \times \\ & \left. \times \log \frac{\mu \left(m^2 + p^2 - \mu^2 + \sqrt{[(m - \mu)^2 - p^2][(m + \mu)^2 - p^2]} \right)}{m \left(m^2 - p^2 - \mu^2 + \sqrt{[(m - \mu)^2 - p^2][(m + \mu)^2 - p^2]} \right)} \right\} \quad (3.71) \end{aligned}$$

3.7. AU-DELÀ DE L'APPROXIMATION *LADDER* : PRISE EN COMPTE DE LA SELF-ÉNERGIE.

Si $(m - \mu)^2 < p^2 < (m + \mu)^2$, elle s'exprime par :

$$\begin{aligned} \Sigma_R(p^2) = & -\frac{\alpha}{\pi p^2} \left\{ p^2 \mu \sqrt{4m^2 - \mu^2} \arctan \frac{\sqrt{4m^2 - \mu^2}}{\mu} \right. \\ & + (p^2 - m^2)(m^2 - \mu^2) \log \frac{m}{\mu} - m^2 \sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][(m + \mu)^2 - p^2]} \times \\ & \times \left[\arctan \frac{p^2 + m^2 - \mu^2}{\sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][(m + \mu)^2 - p^2]}} \right. \\ & \left. \left. + \arctan \frac{p^2 - m^2 + \mu^2}{\sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][(m + \mu)^2 - p^2]}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Si $p^2 > (m + \mu)^2$, la fonction $\Sigma_R(p^2)$ devient complexe. Sa partie réelle est donnée par :

$$\begin{aligned} Re[\Sigma_R(p^2)] = & -\frac{\alpha}{\pi p^2} \left\{ p^2 \mu \sqrt{4m^2 - \mu^2} \arctan \frac{\sqrt{4m^2 - \mu^2}}{\mu} \right. \\ & + (p^2 - m^2)(m^2 - \mu^2) \log \frac{m}{\mu} - m^2 \sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][p^2 - (m + \mu)^2]} \times \\ & \times \log \frac{\mu \left(m^2 + p^2 - \mu^2 + \sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][p^2 - (m + \mu)^2]} \right)}{m \left(p^2 - m^2 + \mu^2 + \sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][p^2 - (m + \mu)^2]} \right)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

et sa partie imaginaire par :

$$Im[\Sigma_R(p^2)] = -\frac{\alpha m^2}{p^2} \sqrt{[p^2 - (m - \mu)^2][p^2 - (m + \mu)^2]} \quad (3.74)$$

Remarquons que ces expressions se simplifient beaucoup lorsque $\mu = 0$. Dans ce cas, elle s'exprime par :

$$\Sigma_R(p^2) = \frac{-\alpha}{\pi} (p^2 - m^2) \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2(\mathcal{M}^2 - p^2)}$$

donc :

$$\Sigma_R(p^2) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\pi p^2} (p^2 - m^2) \log \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) & \text{si } p^2 < m^2 \\ \frac{\alpha}{\pi p^2} (p^2 - m^2) \left[\log \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) - i\pi \right] & \text{si } p^2 > m^2 \end{cases}$$

Terminons enfin par le calcul de l'expression de $\Sigma_R(p^2)$ au voisinage de $p^2 = m^2$:

$$\Sigma_R(p^2) \approx (p^2 - m^2) \left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2}$$

La dérivée $\left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2}$ s'exprime de la manière suivante :

$$\left. \frac{d\Sigma(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\mu(3m^2 - \mu^2)}{m^2 \sqrt{4m^2 - \mu^2}} \arctan \left(\frac{\sqrt{4m^2 - \mu^2}}{\mu} \right) - \left(1 - \frac{\mu^2}{m^2} \right) \log \left(\frac{m}{\mu} \right) \right\} \quad (3.75)$$

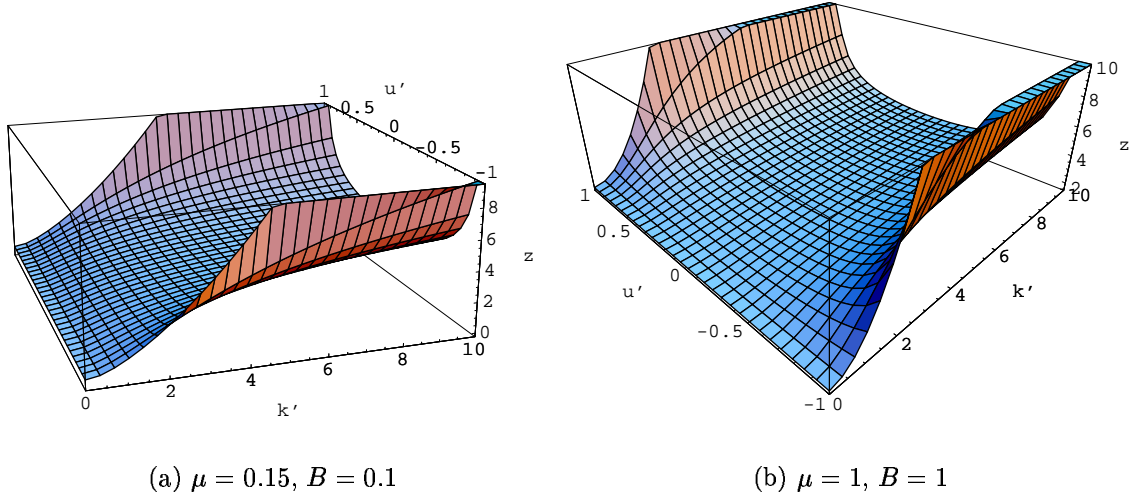


FIG. 3.18 – Fonction $\zeta(k', u')$ pour différentes valeurs de μ et M^2 , pour $\alpha = 1$. $k' \in \{0, 10\}$ et $u' \in \{-1, 1\}$

3.7.2 Équation pour les états liés

L'équation pour les états liés (3.14) s'écrit en remplaçant l'expression du propagateur G_0 par la valeur de G donnée dans (3.68). Elle s'exprime de la façon suivante :

$$\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2) - \zeta(\alpha, \vec{k}', \hat{n}, M^2)]} \Gamma(\vec{k}', \hat{n}) \quad (3.76)$$

où nous avons introduit la fonction ζ définie par²⁶ :

$$\zeta = \frac{1}{x} \Sigma_R(p_1^2) + \frac{1}{1-x} \Sigma_R(p_2^2) \quad (3.77)$$

Les carrés des moments extérieurs $p_1^2 = (k'_1 - \omega\tau')^2$ et $p_2^2 = (k'_2 - \omega\tau')^2$ peuvent s'écrire avec ces variables sous la forme suivante :

$$p_1^2 = m^2 - x'(4\varepsilon_{k'}^2 - M^2) \quad ; \quad p_2^2 = m^2 - (1-x')(4\varepsilon_{k'}^2 - M^2)$$

L'équation (3.76) est équivalente à l'équation régissant les états liés avec prise en compte de la self-énergie obtenue par C.R. JI [34]. Remarquons que la fonction $\hat{\zeta}$ est symétrique par rapport à $x' = \frac{1}{2}$, les fonctions p_1^2 et p_2^2 ne différant que par le changement $x' \rightarrow (1-x')$. Dans les variables k' et $u' = \hat{n} \cdot \vec{k}' = \hat{k}'$, cette symétrie apparaît par rapport à $u' = 0$. Cette fonction est toujours positive pour le calcul des états liés ($M \leq 2m$). La fonction $\hat{\zeta}$ est représentée dans la figure (3.18).

26. Rappelons-nous que :

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \right)$$

3.7. AU-DELÀ DE L'APPROXIMATION *LADDER* : PRISE EN COMPTE DE LA SELF-ÉNERGIE.

Dans le dénominateur $[M^2 - 4(k'^2 + m^2) - \zeta(\alpha, \vec{k}', \hat{n}, M^2)]$, la fonction $\hat{\zeta}$ est de signe contraire à M^2 . Ecrivons le dénominateur sous une forme semblable à celle correspondant au propagateur libre :

$$[M_*^2(\alpha, \vec{k}', \hat{n}) - 4(k'^2 + m^2)]$$

Remarquons que $M_*^2 \leq M^2$ quelque soit la valeur de $\hat{\zeta}$. On peut grossièrement considérer que la prise en compte de la self-énergie agit comme une correction qui diminue la masse totale du système. Ceci augmente la contribution de l'énergie cinétique, provoquant, en première approximation, un effet répulsif.

Par ailleurs, la fonction $\Sigma(p^2)$ est proportionnelle à α , de même que $\hat{\zeta}$, donc la contribution de la self-énergie est d'autant plus grande que α est grand. Pour les faibles valeurs de α , en particulier dans les systèmes faiblement liés à la limite $\mu \rightarrow 0$, on s'attend à une contribution répulsive faible (voire nulle pour $B = 0$) de la self-énergie.

Mais l'effet de la self-énergie ne se limite pas à un seul effet répulsif. En effet, il est possible de factoriser α en écrivant $V = \alpha \tilde{V}$ et $\zeta(\alpha, k', \hat{k}', M^2) = \alpha \tilde{\zeta}(k', \hat{k}', M^2)$. L'équation (3.76) devient alors :

$$\Gamma(k, \hat{k}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{\alpha \tilde{V}(k, \hat{k}, k', \hat{k}', \varphi', M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2) - \alpha \tilde{\zeta}(k', \hat{k}', M^2)]} \Gamma(k', \hat{k}')$$

Il existe une limite B_{max} de l'énergie de liaison lorsque $\alpha \rightarrow \infty$ donnée par

$$\Gamma(k, \hat{k}) = \frac{-m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{\tilde{V}(k, \hat{k}, k', \hat{k}', \varphi', M^2)}{\tilde{\zeta}(k', \hat{k}', M^2)} \Gamma(k', \hat{k}') \quad (3.78)$$

L'existence d'une limite maximale à l'énergie de liaison induit un renforcement de l'effet répulsif de la self-énergie. Cet effet est d'autant plus important que B_{max} est petite, interdisant la liaison pour une gamme d'énergies importante. Cette énergie de liaison limite peut néanmoins disparaître dans certains cas. En effet, $M = 2m - B$ n'apparaît que comme son carré M^2 . L'énergie de liaison doit se trouver dans la gamme de valeurs $B \in \{0, 2m\}$. Si elle existe, l'énergie de liaison limite B_{max} doit être inférieure à $2m$ pour avoir un sens physique. Si ce n'est pas le cas, il y aura des systèmes liés quelle que soit l'énergie de liaison.

Remarquons que cette équation ne dépend plus de α et peut se résoudre avec la même décomposition angulaire utilisée auparavant et en utilisant les mêmes méthodes numériques.

3.8 Résultats à l'approximation *ladder*+*self-énergie*.

Nous voulons résoudre l'équation (3.76) en gardant au maximum un parallèle avec la démarche suivie pour l'approximation *ladder*. La prise en compte de la self-énergie introduit une dépendance angulaire dans le propagateur G , qui n'existait pas dans le propagateur libre G_0 . Il est néanmoins possible de se ramener à ce premier cas, en définissant un potentiel effectif correspondant à la contribution de la self-énergie, qui ne traduit rien d'autre que l'absorption de G dans le potentiel :

$$V^{\text{self}}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = \frac{V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2) - \hat{\zeta}(\alpha, \vec{k}', \hat{n}, M^2)]} [M^2 - 4(k'^2 + m^2)] \quad (3.79)$$

L'équation pour les états liés prend alors une forme identique à celle obtenue à l'approximation *ladder* :

$$\Gamma(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V^{\text{self}}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)}{[M^2 - 4(k'^2 + m^2)]} \Gamma(\vec{k}', \hat{n})$$

La résolution de cette équation se fait de façon identique du cas de l'approximation *ladder*. Il est possible encore de calculer $V_{\lambda\lambda'}^{\text{self}}(k, k')$ selon la même méthode semi-analytique, car la dépendance angulaire de la fonction $\hat{\zeta}(\alpha, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$ ne vient que de $u' = \vec{k}' \cdot \hat{n}$ et il ne modifie en rien l'intégration analytique sur u . Il reste à faire –comme pour l'approximation *ladder*– une intégration angulaire numérique.

La discrétisation sur une base de splines conduira encore à une équation aux valeurs propres, à ceci près qu'il n'est plus possible de factoriser α dans l'intégrale et de l'identifier à la plus petite valeur propre réelle positive Λ . Il faudra maintenant faire varier les différents paramètres (α, B, μ , etc.) jusqu'à obtenir $\Lambda = 1$.

3.8.1 Onde S .

Regardons tout d'abord les résultats obtenus pour l'onde S , c'est-à-dire, ceux obtenus en fixant l'indice $\mu = 0$ et en prenant $\lambda \in \{0, 2, 4, \dots\}$. La première question à poser est de savoir si un nombre limité de composantes Γ_λ permet d'approcher suffisamment la valeur physique obtenue lorsqu'une infinité de couplages est prise en compte, l'idée étant de savoir si l'effet de «moyenne» trouvé dans l'approximation *ladder*. C'est-à-dire, le fait que la physique puisse être bien décrite dans cette approximation par un potentiel effectif moyenné sur la direction de \hat{n} , reste encore valable lorsque la contribution de la self-énergie est prise en compte. Cette propriété n'est *a priori* pas attendue après la modification des propagateurs permettant de prendre en compte la self-énergie, car cette correction dépend de \hat{n} .

Effet de «moyenne» sur \hat{n}

Le tableau (3.6) montre –pour différentes masses μ échangées et différentes énergies de liaison– les constantes de couplages α calculées en limitant le calcul à une, deux ou trois composantes. Comme dans le cas de la seule approximation *ladder*, la valeur de la constante de couplage reste pratiquement inchangée pour des calculs à plus de deux

3.8. RÉSULTATS À L'APPROXIMATION *LADDER*+*SELF-ÉNERGIE*.

composantes. La valeur calculée à trois composantes correspond, à la précision montrée, à la constante de couplage physique. Nous remarquons alors que le calcul limité à la première composante suffit à approcher la valeur physique avec une précision inférieure au 1%. Nous retrouvons la même propriété d'effet de «moyenne» que dans l'approximation *ladder*.

μ	B	Γ_0	Γ_0, Γ_2	$\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_4$
0.15	0.01	0.945	0.943	0.943
	0.1	6.027	5.977	5.976
	$B_{lim} = 0.282$			
0.5	0.01	2.335	2.331	2.331
	0.1	6.133	6.108	6.108
	0.5	48.96	48.05	48.04
	$B_{lim} = 0.826$			
1	0.01	4.614	4.606	4.606
	0.1	8.549	8.528	8.528
	0.5	25.30	25.19	25.19

TAB. 3.6 – *Self-énergie* : Calcul de la valeur de α pour différentes énergies de liaison et masses échangées μ , en fonction du nombre de composantes prises en compte. (Onde S).

Comme nous avons fait auparavant, nous allons aussi vérifier la contribution de chaque composante à la normalisation globale. Le tableau (3.7) montre de même que la première composante contribue à plus de 99.9% à la norme de la fonction de vertex.

μ	B	α	C_{Γ_0}	C_{Γ_2}	C_{Γ_4}
0.15	0.01	0.943	0.9998	$0.1963E - 03$	$0.2138E - 05$
	0.1	5.976	0.9993	$0.6914E - 03$	$0.2018E - 05$
	0.5	Pas de solution			
0.5	0.01	2.331	0.9999	$0.1309E - 03$	$0.1436E - 05$
	0.1	6.108	0.9995	$0.4562E - 03$	$0.9098E - 06$
	0.5	48.04	0.9994	$0.6415E - 03$	$0.7676E - 06$

TAB. 3.7 – *Self-énergie* : Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas d'un état S , pour un calcul limité à trois ondes partielles

L'introduction de la self-énergie ne semble pas modifier les symétries intrinsèques au système qui permettent d'expliquer que l'essentiel du contenu physique se retrouve dans la composante V_{00} du potentiel. L'effet de «moyenne» se retrouve dans les deux cas. Cette propriété semble être inhérente au couplage scalaire, à partir duquel la contribution de la self-énergie est calculée, ce qui pourrait expliquer que le comportement physique général ne soit pas modifié.

Résultats pour un échange de masse nulle.

Nous voulons comparer les résultats avec la self-énergie avec ceux obtenus par d'autres équipes. Nous avons trouvé un travail effectué par Ji [34], qui calcule la contri-

bution de la self-énergie pour le modèle de Wick-Cutkosky, dans une approche non explicitement covariante de la LFD. Les résultats montrés sont obtenus pour des masses échangées nulles.

Or notre calcul n'est pas prévu pour obtenir des résultats à la limite $\mu \rightarrow 0$, cas où le noyau devient singulier lorsque $k = k'$ et $u = u'$. Il permet néanmoins d'obtenir des résultats avec une précision acceptable à condition d'avoir des énergies de liaison suffisamment grandes. Comparons tout d'abord nos valeurs sans self-énergie (à une composante) et comparons-les à celles trouvées par Mangin-Brinet dans [13]. Ces résultats sont donnés dans le tableau (3.8).

B	$\alpha_{\text{Mangin-Brinet}}$	α (à Γ_0)
0.001	0.0724	0.095
0.005	0.180	0.188
0.01	0.272	0.276
0.05	0.750	0.752
0.1	1.19	1.196

TAB. 3.8 – *Onde S : Constantes de couplages (calcul à une composante) en fonction des énergies de liaison pour une masse d'échange nulle $\mu = 0$, dans l'approximation ladder. Comparaison avec les résultats de Mangin-Brinet.*

Les résultats obtenus à une composante sont assez proches de ceux obtenus par Mangin-Brinet pour des énergies de liaison supérieures à $B = 0.005$ (en unités de masse m). Il sont manifestement faux pour les plus faibles valeurs de B car α ne tend pas vers zéro.

La contribution à la self-énergie ne change rien aux problèmes dus à une masse échangée nulle, donc nos résultats avec prise en compte de la self-énergie doivent rester valables pour des valeurs de B suffisamment grandes. Nous comparons nos résultats à ceux obtenus par Ji et montrés dans la figure 1 de son article. Dans cet article, il utilise le paramètre β défini par :

$$\beta^2 = m^2 - \frac{1}{4}M^2$$

Le tableau (3.9) montre nos résultats en fonction de ce paramètre. Ces résultats sont assez proches des résultats numériques de Ji.

α	β (à Γ_0)	$\beta_{Ji}(1)$	$\beta_{Ji}(2)$
0.4	0.078	0.081	0.070
0.6	0.099	0.100	0.083
0.8	0.116	0.115	0.092
1.0	0.128	0.124	0.100

TAB. 3.9 – *Self-énergie : Énergie de liaison en fonction de α (calcul à une composante) pour une masse d'échange nulle $\mu = 0$, pour l'onde S. Comparaison avec les résultats de Ji : (1) correspond à un calcul numérique obtenu par une approche variationnelle. (2) correspond à un calcul analytique approché. (Ces données sont extraites de l'article cité.)*

Les résultats de Ji sont obtenus dans une approche non covariante et différente de la nôtre, raison pour laquelle le fait d'avoir obtenu des résultats comparables aux siens nous donne confiance dans notre calcul, principalement lorsque la masse échangée est non nulle. Regardons maintenant quel est l'effet de la self-énergie dans les énergies de liaison.

Effet répulsif de la self-énergie.

Comme il était attendu, la prise en compte de la self-énergie a un effet répulsif sur l'énergie de liaison, ce qui peut être observé dans les graphes (3.19). L'énergie de liaison est, pour la même constante de couplage, plus faible dans ce cas que dans la seule approximation *ladder*.

Les effets répulsifs de la self-énergie sont présents quelle que soit l'énergie de liaison B , en particulier à énergie nulle. Ces effets éloignent encore plus les résultats relativistes des énergies de liaison des systèmes non relativistes, comme nous pouvons le remarquer dans le graphe (3.20).

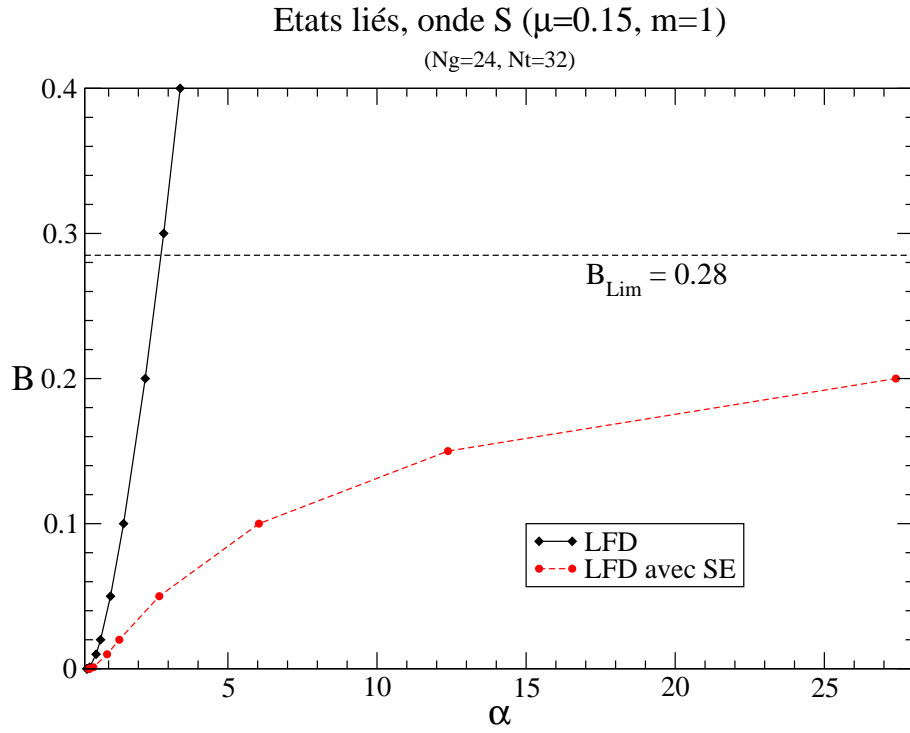
Énergie de liaison limite

La contribution de la self-énergie a aussi un effet qualitatif important qui change la nature des systèmes physiques considérés. De fait, l'effet répulsif observé est très fort et interdit même la liaison pour des énergies de liaison au delà d'une certaine limite. Nous retrouvons ici un effet d'énergie de liaison maximale, car même pour des constantes de couplage infiniment grandes, il est impossible de lier le système pour des énergies $B > B_{lim}$. Ceci peut être vu dans les graphes 3.21.

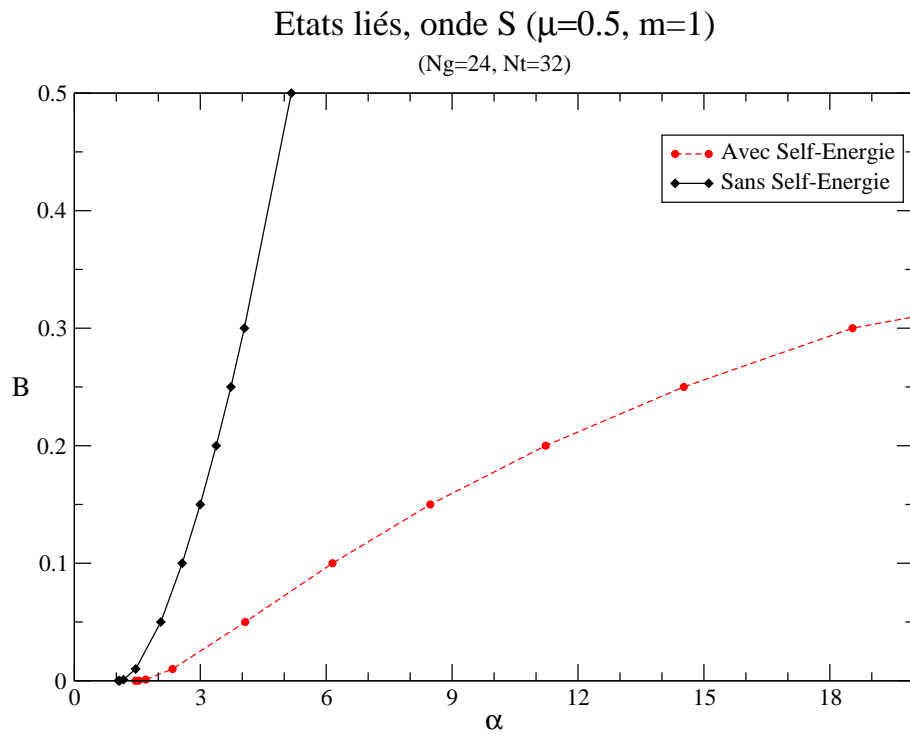
La valeur de B_{lim} est obtenue en résolvant l'équation (3.78) correspondant à la limite $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(k, \hat{k}) = \frac{-m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{\tilde{V}(k, \hat{k}, k', \hat{k}', \varphi', M^2)}{\zeta(k', \hat{k}', M^2)} \Gamma(k', \hat{k}')$$

Bien entendu, lorsque $B_{lim} \notin \{0, 2m\}$, cette énergie de liaison limite n'aura aucune signification physique. Une conséquence de cette restriction est que l'énergie de liaison maximale B_{lim} n'apparaît que pour des systèmes dont la masse échangée μ est inférieure à une masse échangée limite μ_{lim} , correspondant à $B_{lim} = 2m$. L'évolution de B_{lim} en fonction de μ est montrée dans la figure (3.22). Pour obtenir μ_{lim} nous avons encore utilisé l'équation (3.78) en fixant $B = 2m$ et en faisant varier μ jusqu'à obtenir la valeur propre $\Lambda = 1$. Lorsque l'énergie de liaison maximale n'est plus pertinente, l'effet de la self-énergie, tout en étant répulsif, est moins important que lorsque l'énergie de liaison limite existe, et ce, même pour des énergies de liaison faibles. La figure (3.23) montre l'évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage pour $\mu = m = 1$, avec ou sans prise en compte de la self-énergie. Le comportement des deux systèmes est similaire, l'effet répulsif de la self-énergie étant limité, pour une même énergie de liaison, à un écart des constantes de couplage de l'ordre de 10%.



(a) $\mu = 0.15$



(b) $\mu = 0.5$

FIG. 3.19 – Effet de la prise en compte de la self-énergie dans les énergies de liaison en fonction de α . (Avec self-énergie en rouge)

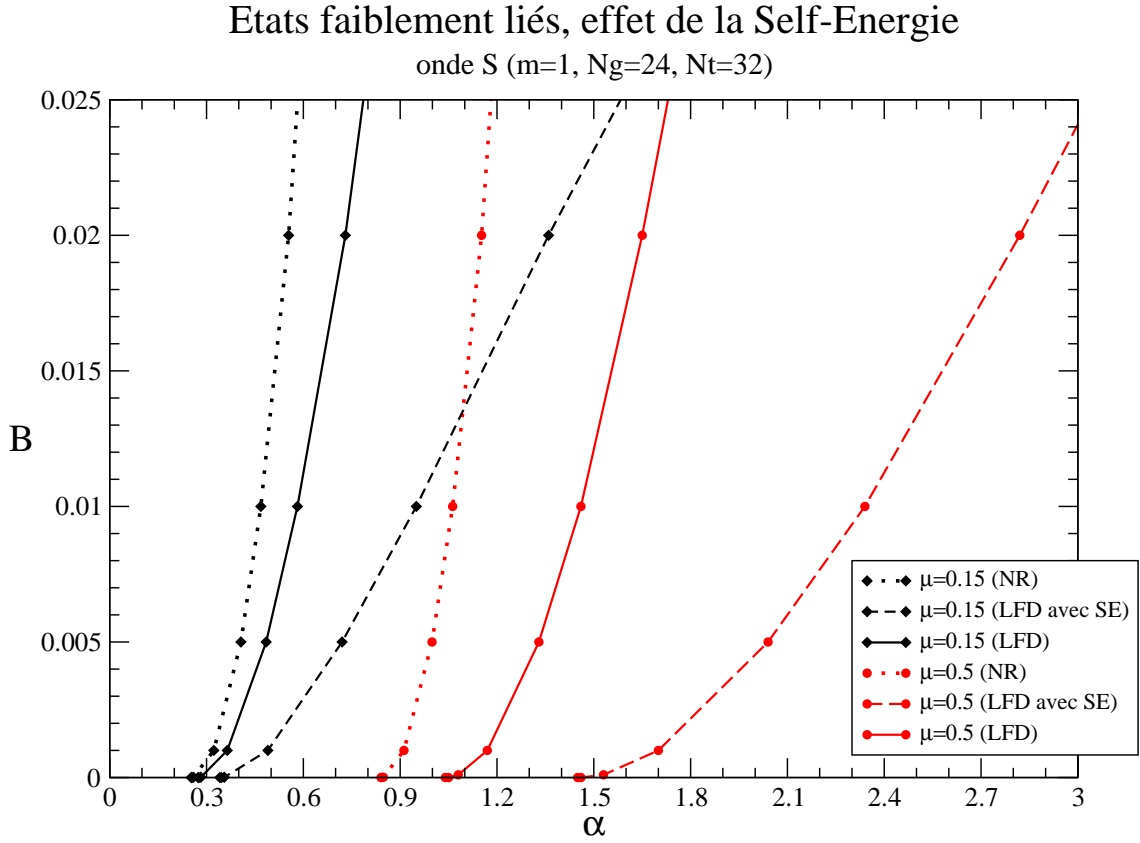
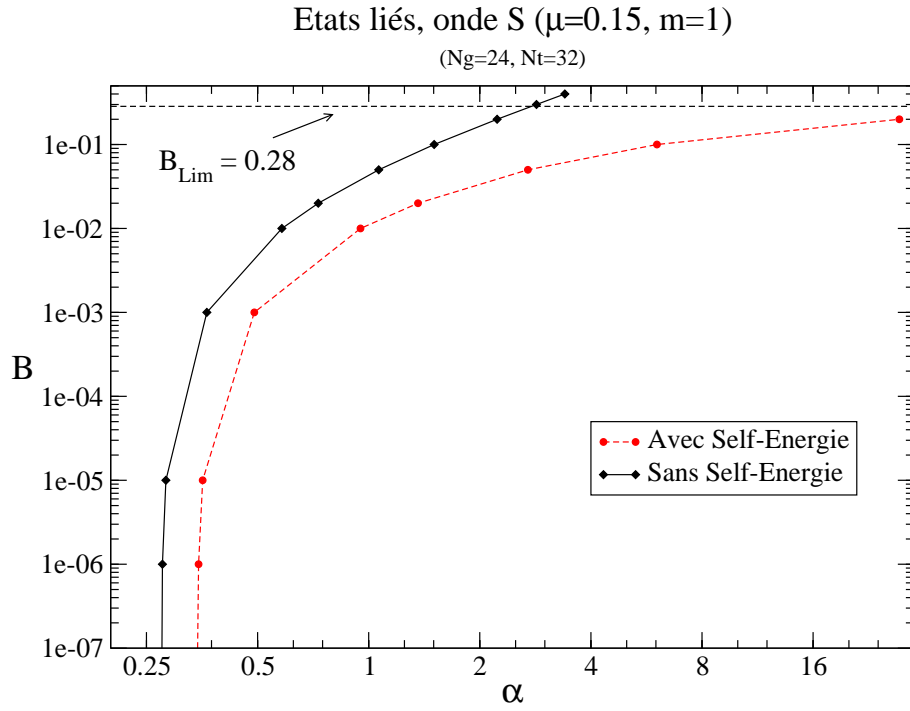
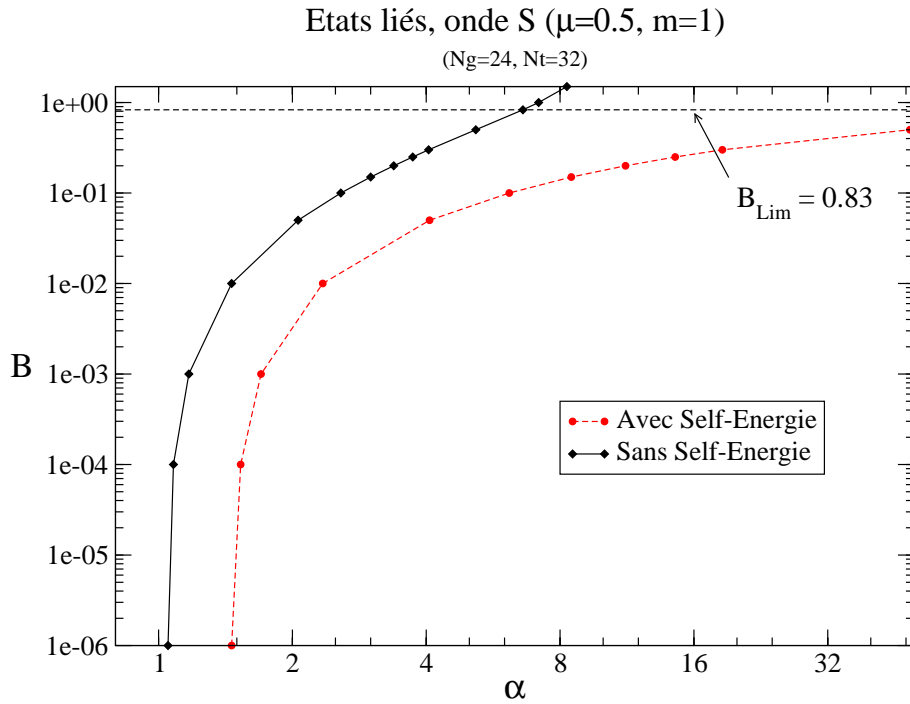


FIG. 3.20 – Effet de la prise en compte de la self-énergie pour les faibles énergies de liaison. En noir $\mu = 0.15$, en rouge $\mu = 0.5$. La ligne pointillée correspond au cas non relativiste, la ligne continue au calcul relativiste dans la *LFD*, la ligne hachurée à la prise en compte de la self-énergie.



(a) $\mu = 0.15$



(b) $\mu = 0.5$

FIG. 3.21 – *Self-Energie* : Énergie de liaison en fonction de la constante de couplage, à l'approximation ladder (en noir) et avec prise en compte de la self-énergie (en rouge). Dans ce dernier cas, il existe une valeur limite pour l'énergie de liaison.

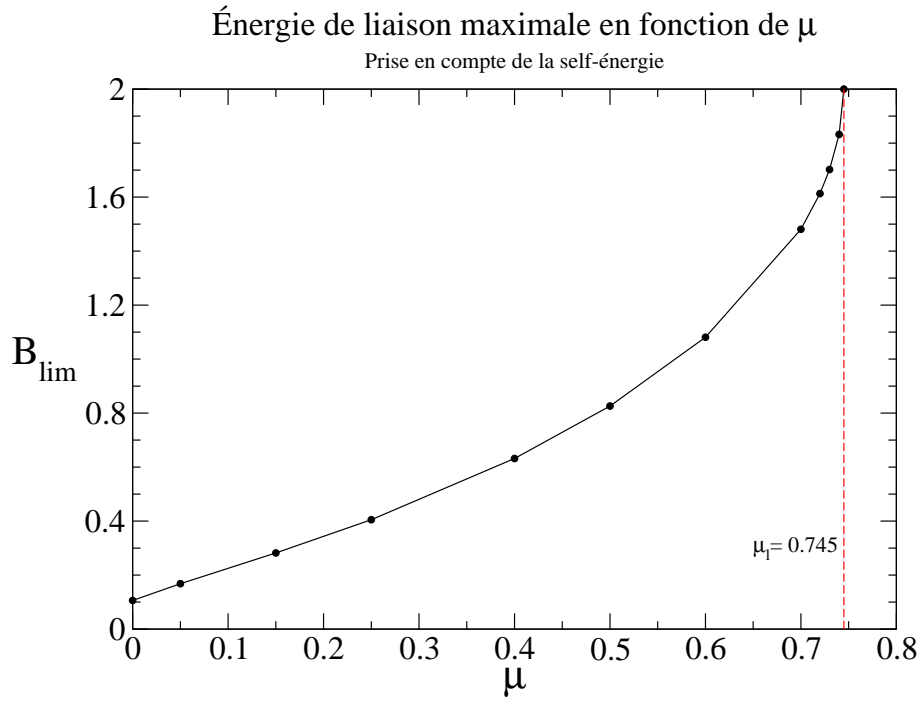


FIG. 3.22 – *Self-Energie* : Évolution de l'énergie de liaison maximale B_{lim} en fonction de μ

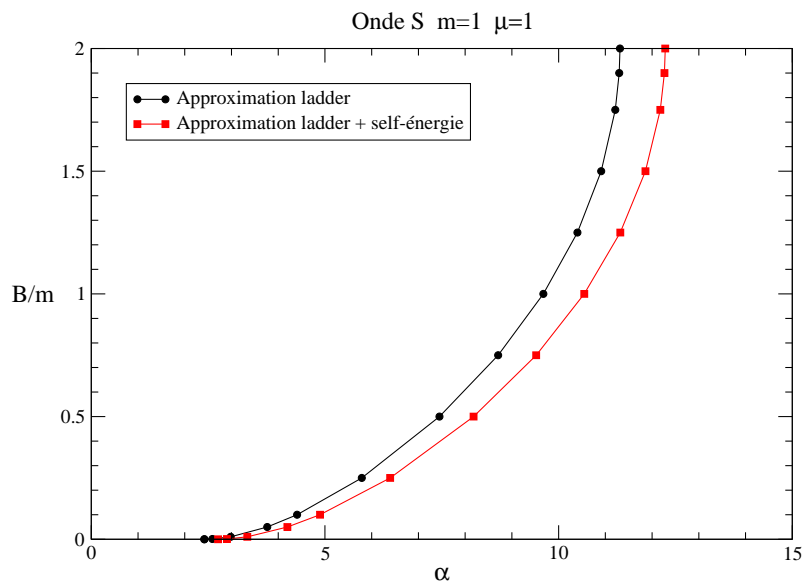


FIG. 3.23 – *Self-Energie* : Évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage lorsque $\mu = 1$

3.8.2 Onde P .

Considérons maintenant le cas de l'onde P . Dans les deux cas possibles, P_0 et P_1 , l'effet répulsif de la self-énergie est suffisamment important pour interdire toute liaison dans une gamme importante de μ .

En effet, si le système est lié, il doit exister une valeur de la constante de couplage α telle que l'équation intégrale ait une solution pour $B = 0$. Dans ce cas, la plus petite valeur propre réelle positive obtenue par la résolution numérique doit être égale à 1.

μ	Onde	$\Lambda_{\alpha=1}$	$\Lambda_{\alpha \rightarrow \infty}$
0.15	P_0	2.71	1.06
	P_1	3.19	1.25
0.25	P_0	4.17	1.25
	P_1	5.08	1.55
0.5	P_0	7.97	1.43
	P_1	10.86	2.00
1	P_0	17.01	1.50
	P_1	27.13	2.44

TAB. 3.10 – *Self-Energie pour l'onde P : Plus petite valeur propre réelle positive Λ obtenue lors de la résolution numérique, pour $B = 0$. Une solution existe lorsque la valeur propre est égale à 1.*

Or l'évolution de la valeur propre en fonction d'un des paramètres est toujours monotone. Comme nous pouvons voir dans le tableau (3.10), l'augmentation de α fait diminuer la valeur propre et aucun état lié n'est donc possible si la valeur propre pour $\alpha \rightarrow \infty$ est supérieure à 1. C'est bien ce qui est observé dans ce tableau.

Paramétrisation de l'effet de la self-énergie

Pour observer plus en détail l'effet répulsif de la self-énergie, introduisons un paramètre réel η devant $\hat{\zeta}$. η varie entre $\eta = 0$ (aucune prise en compte de la self-énergie) et $\eta = 1$ (prise en compte totale de la self-énergie).

Le graphe (3.24) montre l'évolution de l'énergie de liaison en fonction de η lorsque $\mu = 0.15$. Dans ce graphe, nous partons du cas sans self-énergie ($\eta = 0$) et des énergies de liaison différentes ($B/m = \{0.01, 1, 2\}$) correspondant à des constantes de couplage données (trois pour P_0 , trois pour P_1). Remarquons, pour ces constantes de couplage, une décroissance très rapide de l'énergie de liaison lorsque η augmente, avec son annulation pour de valeurs de $\eta < 1$. L'ajout d'un terme répulsif dans le propagateur a un effet très important, même pour des petites corrections. L'effet répulsif de la self-énergie est une contrainte forte à la formation des états liés pour l'onde P .

Existence d'un état lié.

Le tableau (3.10) montre néanmoins que la valeur propre Λ à la limite $\alpha \rightarrow 0$ est proche de 1. La question se pose de savoir s'il existe, pour l'onde P , des systèmes liés pour

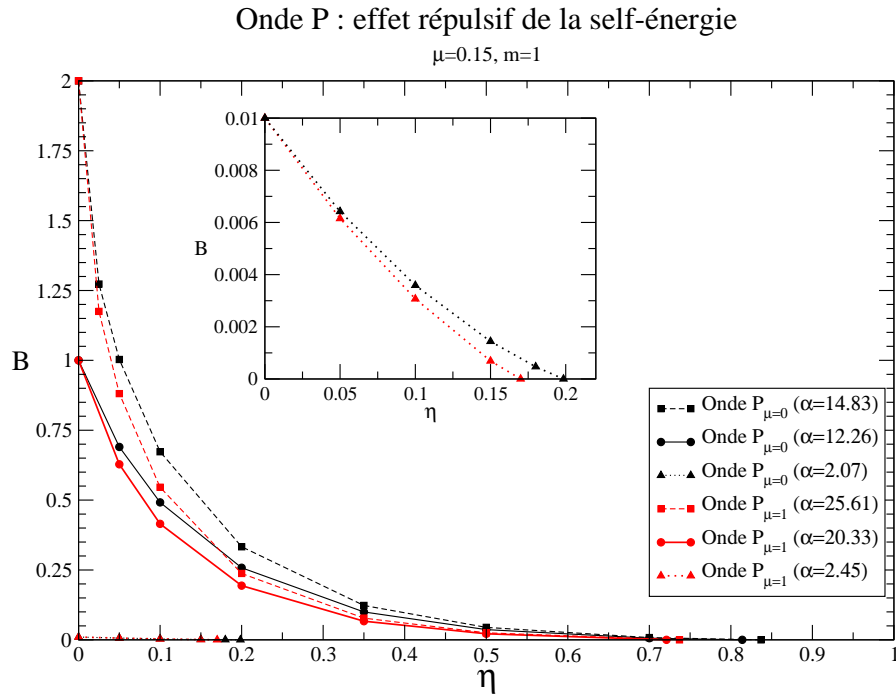


FIG. 3.24 – *Self-Energie* : Effet répulsif du terme contenant la self-énergie et évolution en fonction du paramètre η (sans SE si $\eta = 0$, avec SE si $\eta = 1$) pour $\mu = 0.15$ pour l'onde P.

des masses échangées plus faibles. Faisons varier la valeur de cette masse μ pour faire en sorte que $\Lambda_{\alpha \rightarrow \infty} = 1$.

La variation de Λ étant monotone, il suffit de trouver la valeur μ pour laquelle le système est lié avec une énergie de liaison nulle lorsque la constante de couplage $\alpha \rightarrow \infty$. Il s'agit d'un état non physique, mais ceci permet de connaître une valeur limite μ_{lim} en dessous de laquelle l'existence d'un état lié pour au moins une gamme d'énergies de liaison est assurée. De façon analogue au cas de l'onde S , l'existence d'un état lié à la limite $\alpha \rightarrow \infty$ implique que le système n'est lié que pour des valeurs de B comprises entre $B \in \{0, B_{lim}\}$.

Pour le cas de l'onde P_0 , cette valeur vaut $\mu_{lim} = 0.129$. Pour l'onde P_1 , elle vaut $\mu_{lim} = 0.075$. Le calcul reste néanmoins délicat car il faut calculer des états liés à la limite $B \rightarrow 0$ pour des valeurs de μ très petites.

3.9 Dernières remarques.

Dans ce chapitre, nous avons pu résoudre les états liés d'un système à deux particules sans spin, extension du modèle de Wick-Cutkosky. Nous avons démarré le calcul à l'approximation *ladder*, pour ensuite continuer avec une extension prenant en compte la contribution de la self-énergie.

Deux résultats essentiels ont été obtenus. Tout d'abord, il a été prouvé dans le cas de l'approximation *ladder*, qu'il suffit de limiter le calcul au premier terme d'une décomposition angulaire des vecteurs d'état pour obtenir, avec une excellente précision, les quantités physiques intéressantes du système lié, c'est-à-dire, qu'il est possible d'approximer le potentiel d'interaction complet par un potentiel effectif obtenu par la prise d'une moyenne –éventuellement pondérée– sur toutes les directions de \hat{n} , la direction du front de lumière. Ce résultat reste même valable lorsque le modèle de Wick-Cutkosky est étendu à l'approximation *ladder+self-énergie*. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser ce résultat au profit de l'étude des états de diffusion de deux particules scalaires.

Le deuxième résultat intéressant est que la prise en compte de la self-énergie modifie considérablement la physique des systèmes étudiés, non seulement par un effet quantitatif répulsif, mais par l'apparition d'énergies de liaison limites. Cet effet peut même interdire l'existence d'états liés pour des gammes très importantes de masses échangées dans le cas de l'onde P . Dans le chapitre suivant, nous allons montrer que la contribution de la self-énergie est même indispensable pour pouvoir traiter correctement la diffusion inélastique.

Chapitre 4

Diffusion relativiste dans le cas des particules scalaires.

Dans ce chapitre, nous allons poursuivre l'étude du modèle de Wick-Cutkosky commencée dans le chapitre précédent avec les états liés, par l'extension de l'étude aux états de diffusion. La diffusion dans ce modèle scalaire a été étudiée, parmi d'autres, par Levine, Wright et Tjon [35], ainsi que Phillips et Afnan [36] dans l'approche *equal time*. Dans l'approche du front de lumière, ce modèle a été étudié par Fuda [37] dans une formulation covariante, par Ji et Surya [38] dans la formulation standard de la LFD, ainsi que par Ji, Kim et Min [39] selon cette même formulation, en prenant en compte la self-énergie.

Pour aborder l'étude des états de diffusion, nous allons utiliser la décomposition angulaire introduite dans le chapitre précédent afin de retrouver des équations aux ondes partielles semblables à celles régissant la diffusion non relativiste. Ceci permet d'étendre d'une façon assez naturelle le formalisme non-relativiste de la diffusion à notre modèle relativiste, en particulier à l'obtention des déphasages pour une onde partielle donnée.

Nous allons nous appuyer sur le fait que le contenu physique essentiel des noyaux du modèle de Wick-Cutkosky se trouve dans la première composante du développement sur la base d'harmoniques sphériques, comme il a été observé dans le chapitre précédent. Ceci va nous permettre, en particulier, d'éviter un calcul numérique des déphasages par une méthode de canaux couplés, ce qui rendrait les calculs particulièrement longs.

L'une des caractéristiques les plus intéressantes de cette extension relativiste est l'apparition d'une composante imaginaire du potentiel dès que l'énergie cinétique totale du système dépasse le seuil de création d'une particule d'échange. Signalons que la composante inélastique du potentiel apparaît *automatiquement* dans notre formalisme relativiste. En effet, le potentiel utilisé pour la diffusion est rigoureusement identique à celui dérivé dans le chapitre précédent en utilisant une procédure standard d'obtention de potentiels OBE. L'ouverture d'un canal inélastique (processus $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + 3'$) apparaît comme une conséquence directe de la forme du potentiel relativiste, par l'apparition d'un pôle dans le noyau, dès que l'énergie cinétique dépasse la masse du boson échangé.

Nous verrons cependant que cette composante inélastique ne respecte pas l'unitarité de la matrice S . Nous montrerons ainsi que l'approximation *ladder* est insuffisante pour traiter correctement les processus de diffusion inélastique et qu'il est nécessaire d'étendre le modèle en incluant la contribution de la self-énergie, pour rétablir l'unitarité de la matrice S .

4.1 Équation pour les états de diffusion.

Pour traiter le cas de la diffusion, nous allons suivre une démarche analogue à celle présentée dans le cas non relativiste. Pour cela, nous partons de l'équation pour les états liés, en choisissant comme solution une fonction d'onde ayant un comportement asymptotique compatible avec un état diffusé, c'est-à-dire, comme une superposition d'une onde plane et d'une partie diffusée à déterminer. Partons donc de l'équation (3.13) pour les états liés :

$$[M^2 - 4(k^2 + m^2)]\Psi(k, \hat{k}) = \frac{m^2}{2\pi^3} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} V(k, \hat{k}, k', \hat{k}', M^2) \Psi(k', \hat{k}')$$

Le facteur cinématique peut s'écrire de la façon suivante :

$$M^2 - 4(k^2 + m^2) = 4 \left[\left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) - k'^2 \right] = 4(k_0^2 - k^2)$$

où nous avons introduit le paramètre k_0 défini par :

$$k_0^2 = \left(\frac{M^2}{4} - m^2 \right) \quad (4.1)$$

Pour les états liés, la masse totale du système est donnée par $M = 2m - B$ où B est l'énergie de liaison correspondante. Dans ce cas, le facteur cinématique n'est jamais nul. Pour la diffusion, par contre, ce facteur peut s'annuler car la masse totale $M = 2m + T$ peut croître indéfiniment avec l'énergie cinétique T . En fonction du paramètre k_0 , l'équation (3.13) a pour expression :

$$[k_0^2 - k^2]\Psi_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} d^3 \vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \Psi_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0)$$

Considérons maintenant une particule arrivant avec l'impulsion \vec{k}_0 sur un centre diffuseur. D'une façon générale, l'amplitude diffusée peut s'écrire comme la somme de deux termes, dont le premier terme correspond au comportement asymptotique de l'onde plane incidente, c'est-à-dire lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\Psi_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = N_T [\delta^3(\vec{k} - \vec{k}_0) + \chi_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)]$$

où N_T est une normalisation globale¹. Exigeons maintenant que cette expression de la fonction d'onde soit solution de l'équation pour les états liés. Nous trouvons alors une équation devant être vérifiée par $\chi_{\hat{n}}$:

$$[k_0^2 - k^2]\chi_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{(2\pi)^3} \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + \frac{m}{(2\pi)^3} \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} d^3 \vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \chi_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0)$$

1. Une normalisation différente pour χ est inutile. En effet, χ n'a pas de réalité physique sans l'existence de l'onde plane incidente ; ce serait une erreur d'établir une normalisation qui ne peut pas être déterminée physiquement.

4.1.1 Équation pour la matrice T .

Cette équation peut être écrite sous une forme plus habituelle en redéfinissant le potentiel par² $\hat{V} = \frac{m}{(2\pi)^3}V$ et en posant $T_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = [k_0^2 - k^2]\chi_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)$. Nous retrouvons alors l'équation suivante :

$$T_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}}V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}}d^3\vec{k}'V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)\frac{1}{k_0^2 - k'^2 \pm i\epsilon}T_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0) \quad (4.2)$$

où nous avons introduit $\pm i\epsilon$ pour fixer un contour d'intégration permettant de traiter le pôle en $(k_0^2 - k'^2)$. Notons que la normalisation globale de l'onde diffusée ne joue aucun rôle. Cette équation, à la différence de celle des états liés, possède un terme inhomogène correspondant à l'onde incidente. Nous reconnaissons, dans cette expression, une équation de Lippmann-Schwinger, dont l'unique différence par rapport à celle écrite dans le cas non relativiste vient des facteurs $\frac{m}{\varepsilon_k}$ devant le potentiel. Ceci nous permet de dire que la fonction $T_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)$ joue le rôle de la matrice T introduite dans le deuxième chapitre pour le cas de la diffusion non relativiste³. La fonction $T_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)$ diffère néanmoins de la matrice T du cas non relativiste par sa dépendance en \hat{n} , notée ici comme un sous-indice. Cette notation explicite sera omise par la suite, mais nous devons garder en tête que cette dépendance existe toujours.

Limite non relativiste.

Comparons cette équation à l'équation de Lippmann-Schwinger (2.11) correspondant au cas non relativiste. Elle diffère avec celle-ci uniquement par les facteurs $\frac{m}{\varepsilon_{k_0}}$ et $\frac{m}{\varepsilon_{k'}}$. Lorsque $k \ll m$, *i.e.*, à limite non relativiste, ces facteurs tendent vers 1 et nous retrouvons donc le cas non relativiste, à condition que la limite non relativiste de $T_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)$ existe.

4.1.2 Équation pour la matrice K .

La partie intégrale de l'équation (4.2) se sépare en deux termes à cause du pôle du propagateur, l'un réel, correspondant à la partie principale de l'intégrale, l'autre imaginaire, provenant de terme $i\pi\delta(k_0^2 - k'^2)$. La matrice T est donc nécessairement une matrice complexe, et ce, même si le potentiel V est réel, ce qui peut avoir quelques désavantages, comme nous le verrons par la suite.

Écrivons plutôt, comme pour le cas non relativiste, une équation pour la matrice K en ne considérant que la partie principale de l'intégrale⁴ :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}}V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + PP \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}}d^3\vec{k}'V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)\frac{1}{k_0^2 - k'^2}\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0) \quad (4.3)$$

2. Par la suite, nous omettrons l'écriture du circonflexe dans \hat{V}

3. En toute rigueur, elle devrait être indexée par l'indice \pm en fonction du contour d'intégration du pôle $(k_0^2 - k'^2)$.

4. Par la suite, l'écriture de PP sera sous-entendue.

La matrice \mathcal{K} est, par contre, une matrice réelle si $V \in \mathbb{R}$. La matrice \mathcal{K} n'est complexe que lorsque le potentiel a une composante imaginaire, c'est-à-dire lors de l'ouverture d'un canal inélastique.

Cette expression ne diffère de l'équation non relativiste (2.30) que par les facteurs $\frac{m}{\varepsilon_k}$ devant le potentiel. Écrivons le potentiel sous une forme symétrique :

$$\tilde{V}(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) = \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_k \varepsilon_{k_0}}} V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2)$$

et comparons cette expression avec l'équation non relativiste. Il suffit de poser :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k_0}}} \tilde{\mathcal{K}}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0)$$

pour que l'équation (4.3) prenne la forme de l'équation (2.30). Remarquons en particulier que ces deux expressions sont identiques lorsque nous sommes sur couche d'énergie :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}_0, \vec{k}_0) = \tilde{\mathcal{K}}_{\hat{n}}(\vec{k}_0, \vec{k}_0)$$

Ceci permet d'utiliser les expressions obtenues dans le cas non relativiste pour extraire les déphasages de la matrice \mathcal{K} , ces derniers étant obtenus sur couche d'énergie.

4.2 États d'un moment angulaire quelconque.

Pour résoudre les équations pour la diffusion, nous allons nous ramener au formalisme non relativiste et retrouver les déphasages pour une onde partielle donnée. Pour cela, nous effectuons, de façon complètement analogue au cas des états liés, une décomposition de V et \mathcal{K} sur une base d'harmoniques sphériques, afin de factoriser leur dépendance angulaire. Comme dans le chapitre précédent, nous fixons arbitrairement \hat{n} parallèle à l'axe z , ce qui permet d'interpréter plus facilement les «ondes partielles» de la décomposition, car, dans ce cas, les harmoniques sphériques sont toujours des vecteurs propres de l'opérateur de moment cinétique.

4.2.1 Décomposition angulaire.

Décomposons la double dépendance angulaire de la matrice \mathcal{K} et du potentiel sur une base d'harmoniques sphériques en prenant une forme identique à la décomposition effectuée pour les états liés⁵ (3.42) :

$$V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) = 4\pi \sum_{\lambda\mu\lambda_0\mu_0} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) V_{\lambda\mu, \lambda_0\mu_0}(k, k_0) Y_{\lambda_0\mu_0}(\hat{k}_0) \quad (4.4)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que le potentiel ne dépend que des scalaires k , k_0 et des produits scalaires $\hat{n} \cdot \hat{k}$ et $\hat{n} \cdot \hat{k}_0$ pour fixer \hat{n} parallèle à l'axe \hat{z} . À cause des propriétés d'invariance par rotation du potentiel, la matrice \mathcal{K} ne dépend donc que des mêmes

5. Raison pour laquelle nous introduisons aussi le facteur 4π , facteur qui permet de retrouver l'expression de l'équation non-relativiste pour une onde partielle donnée.

scalaires. La dépendance en \hat{n} n'est alors plus explicite, mais masquée⁶ sous les angles $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{k}$ et $\cos \theta' = \hat{n} \cdot \hat{k}'$. Nous pouvons donc la décomposer de façon équivalente au potentiel :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = 4\pi \sum_{\lambda\mu\lambda_0\mu_0} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) \mathcal{K}_{\lambda\mu,\lambda_0\mu_0}(k, k_0) Y_{\lambda_0\mu_0}(\hat{k}_0) \quad (4.5)$$

Insérons ces expressions dans l'équation (4.3). Multiplions cette expression par $Y_{\lambda'\mu'}(\hat{k})$ et $Y_{\lambda_0\mu_0}^*(\hat{k}_0)$, intégrons le tout sur $d\hat{k}$ et $d\hat{k}_0$ et utilisons les propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques pour simplifier l'équation. Avec notre choix de normalisation des $Y_{\lambda\mu}$, cette équation se réduit alors à l'expression suivante :

$$\mathcal{K}_{\lambda\mu,\lambda_0\mu_0}(k, k_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\mu,\lambda_0\mu_0}(k, k_0) + 4\pi \sum_{\lambda'\mu'} \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} k'^2 dk' \frac{V_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}(k, k')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{\lambda'\mu',\lambda_0\mu_0}(k', k_0)$$

Or nous avons vu, pour les états liés, que le potentiel $V_{\lambda\mu,\lambda'\mu'}$ est diagonal en $\mu\mu'$, ce qui doit être aussi le cas de la matrice \mathcal{K} . Nous aurons donc un ensemble d'équations découplées pour les différentes valeurs de μ_0 :

$$\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0) + 4\pi \sum_{\lambda'} \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} k'^2 dk' \frac{V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}^{(\mu_0)}(k', k_0) \quad (4.6)$$

où le potentiel et la matrice \mathcal{K} projetés ont la forme suivante :

$$V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k') = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{k} d\hat{k}' Y_{\lambda\mu_0}(\hat{k}) V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) Y_{\lambda'\mu_0}^*(\hat{k}') \quad (4.7)$$

$$\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0) = \frac{1}{4\pi} \int d\hat{k} d\hat{k}_0 Y_{\lambda\mu_0}(\hat{k}) \mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) Y_{\lambda_0\mu_0}^*(\hat{k}_0) \quad (4.8)$$

4.2.2 Extraction des déphasages.

La question maintenant est de savoir de quelle façon extraire les déphasages correspondant à une onde partielle donnée. Dans le cas non relativiste, la décomposition angulaire n'introduit qu'un indice l et il existe une relation directe entre le déphasage pour une onde partielle donnée δ_l et la valeur de la matrice \mathcal{K} sur couche d'énergie, *i.e.* lorsque $k = k_0$. Cette relation est donnée par :

$$\tan \delta_l = -2\pi^2 m k_0 \mathcal{K}_l(k_0, k_0)$$

À la différence du cas non relativiste nous avons ici une matrice $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}$ indexée par trois indices, λ , μ_0 et λ_0 . La dépendance en μ_0 et λ_0 ne fait que traduire la dépendance en \hat{n} de la matrice \mathcal{K} . Or cette dépendance ne doit nullement avoir de l'influence sur les quantités physiques, comme la section efficace ou le déphasage, car la direction du front de

6. Nous continuerons cependant à noter par le sous-indice \hat{n} la dépendance en \hat{n} de la matrice $\mathcal{K}_{\hat{n}}$.

lumière n'est qu'une conséquence du type de formalisme relativiste choisi. Par conséquent, la matrice \mathcal{K} ne doit pas dépendre de ces indices sur couche d'énergie :

$$\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k_0, k_0) = \delta_{\lambda\lambda_0} \tilde{\mathcal{K}}_\lambda(k_0, k_0)$$

où $\tilde{\mathcal{K}}_\lambda(k_0, k_0)$ est à comparer à la décomposition angulaire de la matrice \mathcal{K} dans le cas non relativiste. En rapportant cette expression dans (4.5) nous retrouvons une expression habituelle dans le cas non relativiste :

$$\mathcal{K}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) P_{\lambda}(\hat{k} \cdot \hat{k}_0) \tilde{\mathcal{K}}_{\lambda}(k_0, k_0)$$

Les déphasages ne dépendent –en théorie– pas de la valeur de μ et sont diagonaux en λ, λ' . Il suffit, pour obtenir les déphasages, de fixer une valeur de λ_0 , avec n'importe quelle valeur de μ . Dans les faits, l'approximation *ladder* (ou toute autre approximation résultante d'une troncation de l'espace de Fock) détruit cette unicité des solutions pour une onde partielle donnée. La matrice \mathcal{K} sur couche –et donc les déphasages– dépend de la valeur de μ pour une onde partielle donnée. De façon équivalente au cas des états liés, nous avons un déphasage pour l'onde S (correspondant donc à $\lambda_0 = 0$ et $\mu_0 = 0$), deux déphasages pour l'onde P (correspondant à $\lambda = 1$ et $\mu_0 = 0, \pm 1$), trois pour l'onde D et ainsi de suite.

Il est possible cependant de définir une valeur moyenne en μ pour la matrice \mathcal{K} par la relation :

$$\bar{\mathcal{K}}_{\lambda_0}(k_0, k_0) = \frac{1}{2\lambda_0 + 1} \sum_{\mu_0=-\lambda_0}^{\lambda_0} \mathcal{K}_{\lambda_0\lambda_0}^{(\mu_0)}(k_0, k_0) \quad (4.9)$$

Le déphasage pour une onde partielle donnée a finalement pour expression :

$$\tan \delta_{\lambda_0} = -2\pi^2 m k_0 \bar{\mathcal{K}}_{\lambda_0}(k_0, k_0) \quad (4.10)$$

Remarquons que pour l'onde P , nous avons $\bar{\mathcal{K}}_{P_{phys}} = \frac{1}{3}\mathcal{K}_{P_0} + \frac{2}{3}\mathcal{K}_{P_1}$, cette relation est à comparer à celle permettant d'obtenir la masse physique pour les états liés.

Notons aussi que la contrainte $\lambda = \lambda_0$ n'est présente que lorsque nous nous trouvons sur couche d'énergie, mais que l'équation pour la diffusion fait intervenir la matrice \mathcal{K} hors couche. Pour résoudre l'équation (4.6) pour une onde partielle donnée, il faut fixer la valeur de λ_0 et μ_0 , sans oublier qu'il s'agit d'un système d'une infinité d'équations couplées, le paramètre λ n'étant pas fixé.

4.3 Approximation *ladder* : Propriétés du noyau.

Revenons sur l'expression explicite (3.26) du noyau obtenue dans le chapitre précédent. Pour rappel, le potentiel est donné par :

$$V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = -\frac{4\pi\alpha}{Q^2 + \mu^2}$$

où

$$Q^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2 + (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k'}^2 - \frac{1}{2}M^2) \left| \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right| - \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{\varepsilon_k \varepsilon_{k'}} (\hat{n} \cdot \vec{k}) (\hat{n} \cdot \vec{k}')$$

Qu'y a-t-il de changé par rapport à l'étude des états liés ? Pour ces derniers, nous avons un lien entre la masse totale M et l'énergie de liaison du système donnée par $M = 2m - B$, donc M^2 avait une valeur maximale égale à $4m^2$ et le terme :

$$(\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k'}^2 - \frac{1}{2}M^2) \left| \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right|$$

était toujours positif, ce qui suffisait pour garantir la positivité de Q^2 . Le noyau ne pouvait être singulier qu'à la limite $\mu \rightarrow 0$. Pour le cas de la diffusion, la masse totale du système est reliée à l'énergie cinétique T par la relation :

$$M = 2m + T$$

Or T peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et il est alors possible d'annuler le terme Q^2 et même le rendre négatif⁷. Nous nous attendons donc à observer une valeur limite de T à partir de laquelle le noyau peut devenir divergent. Cette limite sera calculée explicitement dans la section (4.3.2).

4.3.1 Propriétés des $V_{\lambda\lambda'}^\mu$

Regardons tout d'abord le potentiel décomposé. Il garde une forme identique à celle trouvée pour le calcul des états liés, son expression est donc celle donnée par (3.44), que nous reproduisons ici :

$$\begin{aligned} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu)}(k, k', M^2) &= c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} V(k, u, k', u', \bar{\varphi}, M^2) \cos(\mu\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

avec

$$c_{\lambda\lambda'\mu} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} \sqrt{\frac{(\lambda-\mu)! (\lambda'-\mu)!}{(\lambda+\mu)! (\lambda'+\mu)!}}$$

La valeur de M^2 n'incide aucunement dans la dépendance de $V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$ en fonction des variables angulaires. Il s'en suit que les propriétés des $V_{\lambda\lambda'}^\mu$ restent inchangées par rapport à celles correspondant aux états liés, en particulier la règle de sélection exigeant que $\lambda + \lambda'$ soit un nombre pair pour que le noyau projeté soit non nul.

Nous retrouvons, comme dans le cas précédent un découplage entre les composantes paires et les composantes impaires de λ . Comme l'onde partielle calculée est indexée par λ_0 et μ_0 , il existe des familles de solutions distinctes. Pour l'onde S nous avons $\lambda_0 = 0$ et l'équation pour les états de diffusion s'écrit sous la forme matricielle suivante :

7. Bien sûr, dans ce cas, la dénomination « Q^2 » est purement formelle, une simple réminiscence du calcul des états liés.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{00}^{(0)} \\ \mathcal{K}_{20}^{(0)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k,k_0)} = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \begin{pmatrix} V_{00}^{(0)} \\ V_{20}^{(0)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k,k_0)} + 4\pi \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} \frac{k'^2 dk'}{k_0^2 - k'^2} \begin{pmatrix} V_{00}^{(0)} & V_{02}^{(0)} & \cdots \\ V_{20}^{(0)} & V_{22}^{(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(k,k')} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{00}^{(0)} \\ \mathcal{K}_{20}^{(0)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k',k_0)}$$

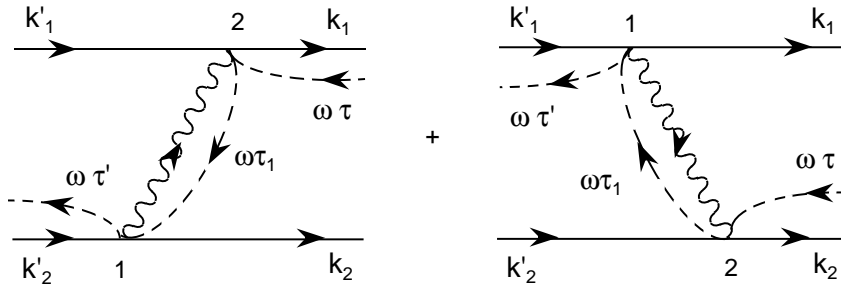
Pour l'onde P , deux équations indexées par $\mu = 0, \pm 1$:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11}^{(\mu)} \\ \mathcal{K}_{31}^{(\mu)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k,k_0)} = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \begin{pmatrix} V_{11}^{(\mu)} \\ V_{31}^{(\mu)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k,k_0)} + 4\pi \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} \frac{k'^2 dk'}{k_0^2 - k'^2} \begin{pmatrix} V_{11}^{(\mu)} & V_{13}^{(0)} & \cdots \\ V_{31}^{(\mu)} & V_{33}^{(0)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(k,k')} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11}^{(\mu)} \\ \mathcal{K}_{31}^{(\mu)} \\ \vdots \end{pmatrix}_{(k',k_0)}$$

Le déphasage est obtenu à partir de la première composante de \mathcal{K} , *e.g.* \mathcal{K}_{00} pour l'onde S ou \mathcal{K}_{11} pour l'onde P .

4.3.2 Seuil de création inélastique.

Nous savons que le potentiel doit diverger pour une valeur suffisamment grande de T . Le calcul de cette valeur limite est cependant malaisé à partir de l'expression (3.26) du noyau. Revenons plutôt à l'expression du noyau obtenue à partir des amplitudes montrées dans la figure (3.4) –reprise ci-près.



Noyau de l'interaction dans la *ladder approximation*

D'après les règles diagrammatiques, l'amplitude correspondante est donnée par l'équation (3.19), que nous écrivons à nouveau ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) &= g^2 \int \Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1)) \delta((k_1 - k'_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau)^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\varepsilon} \\ &\quad + g^2 \int \Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1)) \delta((k'_1 - k_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau')^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\varepsilon} \end{aligned}$$

Réécrivons cette expression en gardant le paramètre τ_1 explicite :

$$\mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) = g^2 \frac{\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1))}{2\omega \cdot (k_1 - k'_1)\tau_1} + g^2 \frac{\Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{2\omega \cdot (k'_1 - k_1)\tau_1}$$

pour ensuite utiliser les relations de conservation des moments pour obtenir une expression différente. En particulier, utilisons, pour le diagramme de gauche, la relation de conservation des impulsions :

$$\mathcal{P} = k_1 + k_2 - \omega\tau = k'_1 + k_2 + q - \omega\tau_1$$

où q est le moment du boson échangé. Élevons cette dernière relation au carré pour obtenir une nouvelle expression de τ_1 . La masse totale du système étant donnée par $M^2 = \mathcal{P}^2 = (k_1 + k_2 - \omega\tau)^2$, nous avons donc l'expression suivante :

$$\tau_1 = \frac{(k'_1 + k_2 + q)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k'_1 + k_2 + q)} = \frac{(k'_1 + k_2 + q)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k_1 + k_2)}$$

Pour le deuxième diagramme, la loi de conservation $\mathcal{P} = k_1 + k'_2 + q - \omega\tau_1$ implique que :

$$\tau_1 = \frac{(k_1 + k'_2 + q)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k'_1 + k_2 + q)} = \frac{(k'_1 + k_2 + q)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k_1 + k_2)}$$

Il est possible d'exprimer le noyau maintenant sous la forme suivante :

$$\mathcal{K} = g^2 \frac{\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1))}{[(k'_1 + k_2 + q)^2 - M^2]} \frac{\omega \cdot (k_1 + k_2)}{\omega \cdot (k_1 - k'_1)} + g^2 \frac{\Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{[(k_1 + k'_2 + q)^2 - M^2]} \frac{\omega \cdot (k_1 + k_2)}{\omega \cdot (k'_1 - k_1)} \quad (4.11)$$

Cette nouvelle représentation du noyau nous permet de faire quelques remarques. D'abord, le facteur $\omega \cdot (k_1 - k'_1)$ du dénominateur ne peut jamais s'annuler à cause des lois de conservation. Il ne s'agit pas d'un pôle, contrairement aux facteurs $[(k'_1 + k_2 + q)^2 - M^2]$ et $[(k_1 + k'_2 + q)^2 - M^2]$ qui peuvent s'annuler. Par conséquent, le noyau n'est singulier que si la masse totale M vérifie l'une des relations suivantes :

$$M^2 = (k'_1 + k_2 + q)^2 \quad \text{ou} \quad M^2 = (k_1 + k'_2 + q)^2$$

Or il existe une valeur minimale des impulsions pour $(k'_1 + k_2 + q)^2$ et $(k_1 + k'_2 + q)^2$, correspondant au cas où toutes les particules sont au repos. Cette valeur minimale est égale à $(2m + \mu)^2$, le noyau n'est donc divergent que si le carré de la masse totale du système dépasse cette valeur :

$$M^2 = (2m + T)^2 > (2m + \mu)^2$$

Le pôle du noyau apparaît donc si $T > \mu$, c'est-à-dire, *si l'énergie cinétique du système dépasse la masse du boson échangé*. Il s'agit d'un seuil de création d'une particule de masse μ , ouvrant un canal inélastique.

4.3.3 Propriétés du noyau au-delà du seuil inélastique.

Noyau sur couche d'énergie.

Remarquons d'abord que le noyau sur demi-couche d'énergie $V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2)$ n'est jamais divergent. En effet, à partir des définitions de la masse :

$$M^2 = (k_1 + k_2 - \omega\tau)^2 = (k'_1 + k'_2 - \omega\tau')^2$$

et des variables \vec{k} et \vec{k}' , exprimons explicitement les paramètres τ et τ' :

$$\tau = \frac{(k_1 + k_2)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k_1 + k_2)} \quad \tau' = \frac{(k'_1 + k'_2)^2 - M^2}{2\omega \cdot (k_1 + k_2)}$$

Ils s'annulent lorsque \vec{k}^2 ou \vec{k}'^2 sont respectivement égaux à $k_0^2 = \frac{M^2}{4} - m^2$. Or la divergence du potentiel provient de l'annulation de τ_1 , qui est interdite par la cinématique lorsque τ (ou τ') est nul, tel qu'il apparaît sur les diagrammes représentant le noyau.

Apparition d'une composante imaginaire de la matrice \mathcal{K} .

Plaçons-nous maintenant au-delà du seuil de création et revenons à l'équation (4.3). Le potentiel sur couche étant régulier, seul le terme intégré est divergent. Ceci a comme conséquence immédiate l'apparition d'une contribution imaginaire à la matrice \mathcal{K} . En effet, regardons le terme intégré.

$$\int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{1}{Q^2 + \mu^2} = PP \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{1}{Q^2 + \mu^2} + i\pi \int \delta(Q^2 + \mu^2) \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}}$$

La singularité est encore présente après les intégrations angulaires. Regardons pour l'onde S l'intégration sur φ et écrivons le dénominateur sous la forme $Q^2 + \mu^2 = A + B \cos \varphi$. Lorsque $|A| < B$, il existe un zéro du dénominateur pour $\cos \varphi_0 = \frac{-A}{B}$. La partie principale est nulle :

$$PP \int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi} = 0$$

Il existe donc deux régions distinctes, l'une où le dénominateur ne s'annule pas (lorsque $|A| > B$) et dont l'intégration sur φ donne un résultat réel, l'autre où il existe une divergence et où le résultat de l'intégration est imaginaire pur. Pour les autres ondes partielles, la partie divergente provient toujours de ce terme. Ce résultat apparaît directement dans l'expression du noyau donnée par (3.50). En particulier, nous remarquons que la condition rendant le noyau uniquement réel ($|A| > B$ pour toute valeur de \vec{k} et \vec{k}') n'est vérifiée que lorsque $T < \mu$.

4.3.4 Déphasage inélastique.

Lorsque la matrice \mathcal{K} devient complexe, il faut étendre la définition des déphasages en y introduisant une composante imaginaire. Partons tout d'abord de la relation (4.10) entre le déphasage pour une onde partielle donnée et la matrice \mathcal{K} et posons $y = -2\pi^2 m k_0 \bar{\mathcal{K}}_{\lambda_0}(k_0, k_0)$. Exprimons $\tan \delta$ sous la forme exponentielle :

$$iy = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}$$

En posant $t = e^{i\delta}$, il est possible de déduire la relation suivante :

$$\delta = -i \log \sqrt{\frac{1 + iy}{1 - iy}}$$

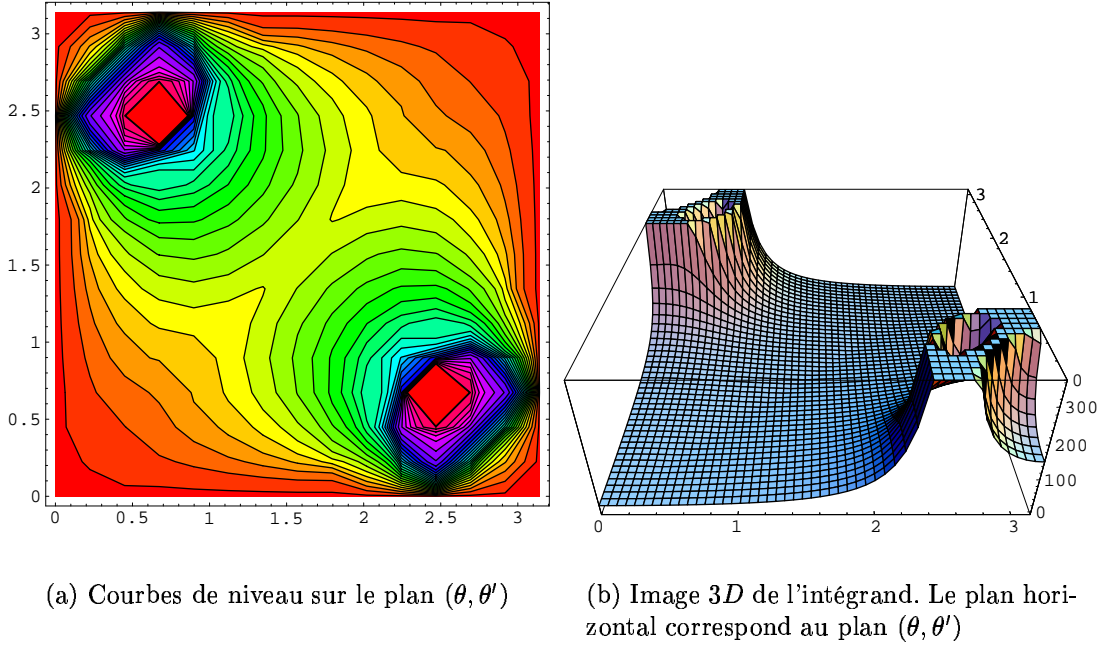


FIG. 4.1 – Intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ pour $\alpha = 1$, $\mu = 0.25$ et $k = k' = 0.1$. L'image à 3D correspond à la seule partie réelle. Dans l'image à 2D, la partie réelle et la partie imaginaire sont représentées (c'est possible car elles ne se superposent jamais.).

En utilisant la détermination du logarithme : $\log z = \log |z| + i \arg(z)$, nous déduisons l'expression des composantes réelles et imaginaires du déphasage :

$$\begin{cases} \delta'_{\lambda_0} = \text{Re}(\delta_{\lambda_0}) = \frac{1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\text{Re}(y)}{1 + \text{Im}(y)} \right) + \arctan \left(\frac{\text{Re}(y)}{1 - \text{Im}(y)} \right) \right] \\ \delta''_{\lambda_0} = \text{Im}(\delta_{\lambda_0}) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{(1 + \text{Im}(y))^2 + (\text{Re}(y))^2} - \frac{1}{2} \ln \sqrt{(1 - \text{Im}(y))^2 + (\text{Re}(y))^2} \end{cases} \quad (4.12)$$

La composante imaginaire du déphasage permet de définir l'inélasticité $e^{2\delta''}$.

4.4 Résolution de l'équation.

Résoudre l'équation (4.6) correspond à répondre à un système couplé d'une infinité d'équations intégrales à 1D, possédant, à la différence du cas des états liés, un terme inhomogène. Une telle résolution est bien entendu hors de nos capacités et nous nous contenterons d'une résolution approchée, qui passe par la troncation de l'infinité d'équations pour les restreindre à un nombre fini.

Pour cela, il sera nécessaire de calculer un certain nombre de potentiels projetés $V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k')$ en passant par une triple intégration angulaire du noyau $V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$:

$$\begin{aligned} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu)}(k, k', M^2) &= c_{\lambda\lambda'\mu} \int du \int du' P_{\lambda\mu}(u) P_{\lambda'\mu}(u') \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\bar{\varphi} V(k, u, k', u', \bar{\varphi}, M^2) \cos(\mu\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

Comme dans le cas des états liés, deux de ces intégrales peuvent être calculées analytiquement, ne restant finalement qu'une intégration angulaire à faire numériquement.

4.4.1 Calcul analytique partiel des noyaux.

Revenons sur l'expression générale du noyau :

$$V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = \frac{-4\pi\alpha}{Q^2 + \mu} = \frac{-4\pi\alpha}{A(k, u, k', u') + B(k, u, k', u') \cos \varphi}$$

Sous cette forme, il est clair que le noyau ne peut pas être divergent lorsque $\left|\frac{A}{B}\right| > 1$. Pour $V_{\lambda\lambda'}^{(\mu)}$ – le noyau projeté sur la base des harmoniques sphériques – cette condition nécessaire à la divergence du noyau est encore présente. Regardons l'expression générale de \bar{V}_0 montrée dans l'équation (3.49) du chapitre précédent :

$$\bar{V}_0 = \frac{-4\pi\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{A + B \cos \varphi} = \begin{cases} \frac{-4\pi\alpha \operatorname{sign}(A)}{\sqrt{A^2 - B^2}} & \text{si } |A| > B \\ \frac{-4i\pi\alpha}{\sqrt{B^2 - A^2 - i\epsilon}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le premier cas nous donne une expression explicite pour la composante réelle du noyau, le deuxième cas correspond à une partie imaginaire pure, ce qui est compatible avec le fait que la partie principale de l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{A + B \cos \varphi}$ est nulle.

Ce terme \bar{V}_0 contient toute l'information sur la divergence du noyau. En effet, les autres ondes partielles – pour d'autres valeurs de μ – s'expriment en fonction de ce terme. Rappelons leur expression donnée dans l'équation (3.50) :

$$\bar{V}_\mu = \frac{-4\pi\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\mu\varphi)}{A + B \cos \varphi} d\varphi = \begin{cases} \bar{V}_1 = \frac{1}{B} (-4\pi\alpha - A\bar{V}_0) \\ \bar{V}_2 = \frac{1}{B^2} (8\pi\alpha A + [2A^2 - B^2]\bar{V}_0) \\ \bar{V}_3 = \frac{-1}{B^3} (-4\pi\alpha[B^2 - 4A^2] + A[4A^2 - 3B^2]\bar{V}_0) \end{cases}$$

Il suffit donc de traiter le cas $\mu = 0$. Lorsque \bar{V}_0 est réel, nous avons une expression identique à celle retrouvée pour les états liés. Il est possible d'effectuer analytiquement l'une des intégrations angulaires restantes, comme il a été montré dans le chapitre précédent (cf. 3.5.1). L'expression analytique des primitives $F_\lambda^\mu = \int P_\lambda(u) V_\mu(k, u, k', u') du$ est donnée dans l'annexe III.

En ce qui concerne la composante imaginaire, nous allons prolonger analytiquement les expressions obtenues pour la composante réelle. Il suffit de garder les mêmes expressions analytiques pour les primitives F_λ^μ , en utilisant, lors de la résolution numérique, des fonctions à arguments complexes, en particulier les racines, logarithmes, etc. Il faut toutefois forcer une détermination complexe, en introduisant un paramètre $i\epsilon$ petit (de l'ordre de 10^{-12}) :

$$\bar{V}_0 = \frac{-4i\pi\alpha}{\sqrt{B^2 - A^2 - i\epsilon}} = \frac{-4i\pi\alpha}{\sqrt{\alpha_\pm u'^2 + \beta_\pm u' + \gamma - i\epsilon}}$$

4.4.2 Méthode de résolution numérique.

Nous voulons résoudre numériquement l'équation (4.6), pour une impulsion incidente k_0 donnée, ainsi que des valeurs de λ_0 et μ_0 :

$$\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0) + 4\pi \sum_{\lambda'} \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} k'^2 dk' \frac{V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}^{(\mu_0)}(k', k_0)$$

La méthode de résolution numérique est semblable à celle suivie pour les états liés. Elle consiste en une décomposition de la matrice \mathcal{K} sur une base de fonctions de spline, permettant de discrétiser le problème et de le ramener à la résolution d'un système linéaire. Nous n'avons plus, maintenant, une équation aux valeurs propres à cause du terme inhomogène. Exprimons maintenant \mathcal{K} dans une base de fonctions de spline :

$$\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) = \sum_j C_j^\lambda(k_0, \lambda_0, \mu_0) S_j(\bar{k}_i) \quad (4.13)$$

où les \bar{k}_i sont les points de collocation. La résolution du système linéaire permet d'obtenir les coefficients $C_j^\lambda(k_0, \lambda_0, \mu_0)$ solutions de l'équation, et d'interpoler les valeurs de la matrice $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k, k_0)$ quelque soit k . Il suffit alors de déterminer la valeur sur couche $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(k_0, k_0)$ pour retrouver le déphasage correspondant.

Traitement de la singularité ($k_0^2 - k^2$)

Il y a toutefois une complication supplémentaire en comparaison aux états liés. Elle vient du calcul de la partie principale de l'intégrale sur k' . Pour les états liés, le terme cinématique ne s'annule jamais, ce qui n'est plus le cas pour la diffusion. Il faut traiter la singularité $\frac{1}{k_0^2 - k'^2}$. Nous nous appuyons sur le résultat connu :

$$\int_{PP} \frac{1}{k_0^2 - k^2} dk = 0$$

pour exprimer le terme intégré de l'équation (4.6) sous la forme :

$$\int_{PP} \frac{m}{\varepsilon_{k'}} k'^2 dk' \frac{V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}^{(\mu_0)}(k', k_0) = \int_{PP} \frac{m dk'}{k_0^2 - k'^2} \left(\frac{k'^2}{\varepsilon_{k'}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k') \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}^{(\mu_0)}(k', k_0) \times \right. \\ \left. - \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(k, k_0) \mathcal{K}_{\lambda'\lambda_0}^{(\mu_0)}(k_0, k_0) \right)$$

Avec cette formulation, le numérateur s'annule lorsque $k' \rightarrow k_0$. Utilisons maintenant la décomposition sur la base de splines (4.13) pour écrire, à partir de (4.6), l'équation qui doit être vérifiée pour tous les points de collocation⁸ :

$$\sum_j C_j^\lambda S_j(\bar{k}_i) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) + 4\pi m \sum_j \int_0^\infty \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} \times \\ \times \left\{ \frac{k'^2}{\varepsilon_{k'}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k') C_j^{\lambda'} S_j(k') - \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) C_j^{\lambda'} S_j(k_0) \right\}$$

8. Pour alléger l'écriture, nous sous-entendons la dépendance en k_0, λ_0 et μ_0 de $C_j^\lambda(k_0, \lambda_0, \mu_0)$.

4.4. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION.

Les fonctions de splines étant à support borné, l'intégration peut se limiter à l'intervalle $\Delta I = [a, b]$, dans lequel la spline $S_j(k')$ est non nulle :

$$\begin{aligned} \sum_j C_j^\lambda S_j(\bar{k}_i) &= \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) + 4\pi m \sum_j PP \int_{\Delta I} \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{k'^2}{\varepsilon_{k'}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k') C_j^{\lambda'} S_j(k') - \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) C_j^{\lambda'} S_j(k_0) \right\} \\ &- 4\pi \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) C_j^{\lambda'} S_j(k_0) PP \left[\int_0^a + \int_b^\infty \right] \left[\frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Or le dernier terme est aisément calculable⁹. Utilisons le résultat suivant :

$$\int_a^b \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} = \frac{1}{2k_0} \left[\log \left(\frac{1 - \frac{a}{k_0}}{1 + \frac{a}{k_0}} \right) - \log \left(\frac{1 - \frac{b}{k_0}}{1 + \frac{b}{k_0}} \right) \right]$$

En ne regardant que la partie principale, nous avons :

$$PP \int_0^a \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} = \frac{1}{2k_0} \log \left(\frac{k_0 + a}{k_0 - a} \right) \quad ; \quad PP \int_b^\infty \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} = \frac{1}{2k_0} \log \left(\frac{k_0 - b}{k_0 + b} \right)$$

Écrivons chaque terme sous forme matricielle :

$$A_{ij}^{\lambda\lambda'} = S_j(\bar{k}_i) \delta_{\lambda\lambda'} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{\lambda\lambda'} &= 4\pi m \int_{\Delta I} \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} \left\{ \frac{k'^2}{\varepsilon_{k'}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k') S_j(k') - \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) S_j(k_0) \right\} \\ &- 4\pi m \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda'}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) \frac{1}{2k_0} \log \frac{(k_0 + a)(k_0 - b)}{(k_0 - a)(k_0 + b)} S_j(k_0) \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec $\int_{\Delta I} = \int_a^b$. Le terme inhomogène peut être rangé dans un vecteur :

$$Y_i^\lambda = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda_0}^{(\mu_0)}(\bar{k}_i, k_0) \quad (4.17)$$

L'équation (4.6) s'écrit alors sous la forme matricielle suivante¹⁰ :

$$(A - B)_{ij}^{\lambda\lambda'} C_j^{\lambda'} = Y_i^\lambda \quad (4.18)$$

La matrice $B_{ij}^{\lambda\lambda'}$ et le vecteur Y_i^λ dépendent respectivement de quatre et deux indices. Comme dans le cas des états liés, nous utilisons une méthode de canaux couplés pour

9. Pour $x < 0$, nous choisissons la détermination du logarithme suivante :

$$\log(-x) = \log(x) + i\pi$$

10. Les indices répétés sont sommés.

résoudre numériquement l'équation. Pour cela, il suffit de créer une bijection entre les entiers (λ, i) et un entier I , ainsi (λ', j) et J . Nous avons alors l'expression matricielle suivante :

$$(A - B)_{IJ} C_J = Y_I$$

Ceci correspond à un système linéaire, dont il existe une grande quantité de méthodes de résolution dans les bibliothèques scientifiques. Le résultat du calcul est un vecteur C_I . Il est facile d'inverser la bijection pour obtenir les coefficients $C_j^{\lambda'}$ pour k_0, λ_0 et μ_0 donnés, et par interpolation, la matrice $\mathcal{K}_{\lambda\lambda_0}^{\mu_0}(k, k')$.

Choix de la grille en k'

Il existe d'autres différences par rapport à la résolution numérique de l'équation pour les états liés. En particulier, le choix de la grille d'intégration en k' . La figure (4.3) montre le potentiel après intégration angulaire $V_{00}(k, k')$. Remarquons d'abord, que la partie réelle du potentiel décroît régulièrement à partir d'une certaine limite, où la partie imaginaire du potentiel devient nulle. Il s'agit des régions avec des valeurs assez grandes de k ou de k' .

En effet, regardons le dénominateur du potentiel. Nous savons qu'il n'y a aucune divergence du potentiel lorsque $M < 2m$, c'est-à-dire, pour les états liés lorsque $M = 2m - B$. Or le seul terme du dénominateur qui dépend de M est le suivant :

$$(k^2 + k'^2 + 2m^2 - \frac{1}{2}M^2) \left| \frac{k' \cos \theta'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{k \cos \theta}{\varepsilon_k} \right| = (k^2 + k'^2 - 2k_0^2) \left| \frac{k' \cos \theta'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{k \cos \theta}{\varepsilon_k} \right|$$

Pour les états liés, ce terme est toujours positif ou nul $(k^2 + k'^2 + 2m^2 - \frac{1}{2}M^2) \geq 0 \forall k, k'$. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour avoir une divergence est donc que $(k^2 + k'^2 - 2k_0^2) \leq 0$. Pour un couple (k, k') tel que $k^2 + k'^2 > 2k_0^2$ il n'y a donc pas de divergence, d'où l'annulation de la partie imaginaire du potentiel pour les grandes valeurs de k, k' . Il s'agit d'une délimitation grossière de la limite à partir de laquelle le potentiel imaginaire s'annule. Cette limite est en effet plus petite.

En pratique, nous avons pris une grille en deux domaines. Le premier domaine correspond à la région fortement variable, avec un grand nombre de points et pas d'accélérateur, pour pouvoir bien prendre en compte les évolutions rapides du potentiel. Le second domaine va jusqu'à k_{max} et le comportement y est très régulier. Dans ce cas, un plus faible nombre de points et un accélérateur important (cf. figure (4.2)) suffisent.

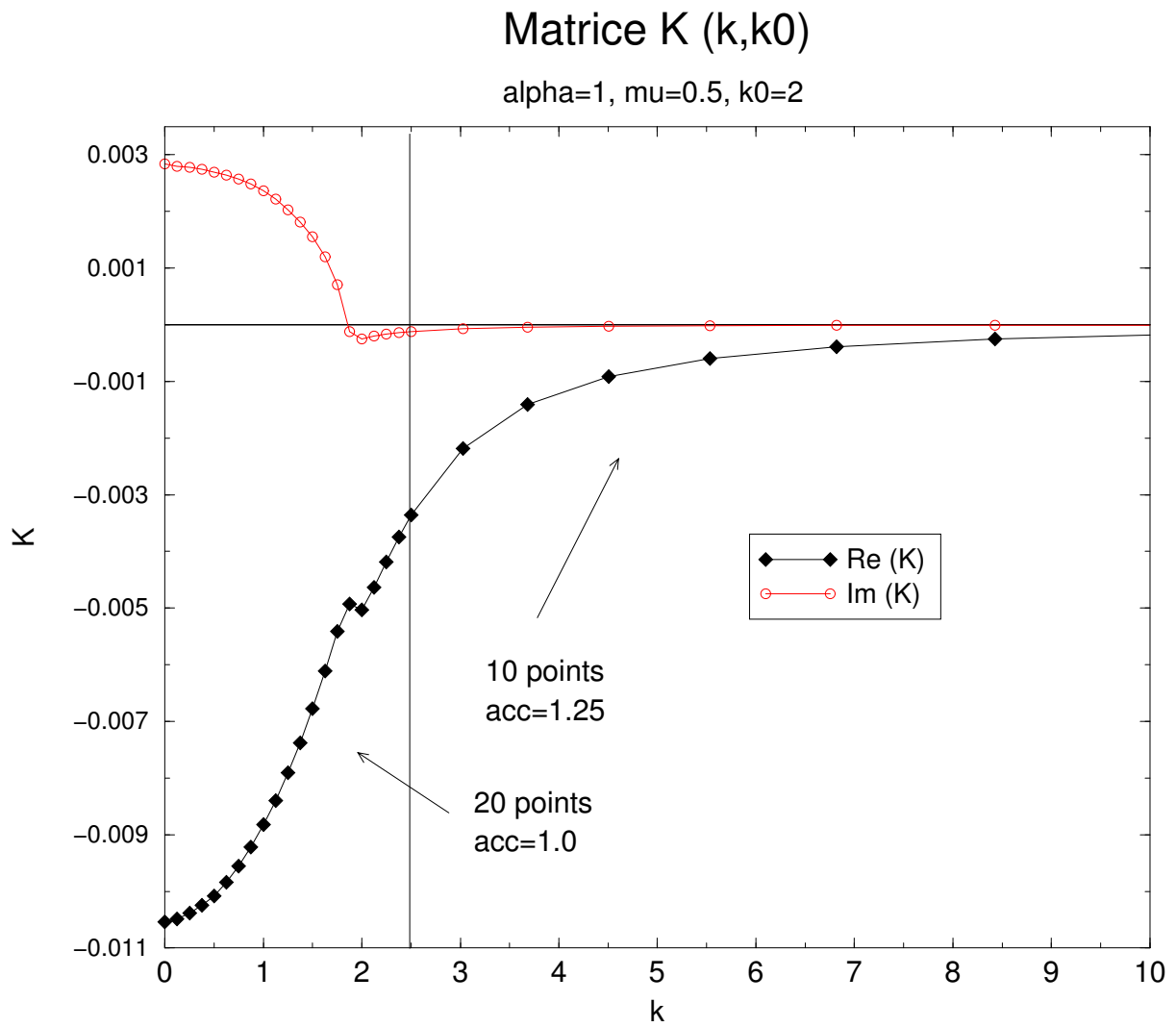
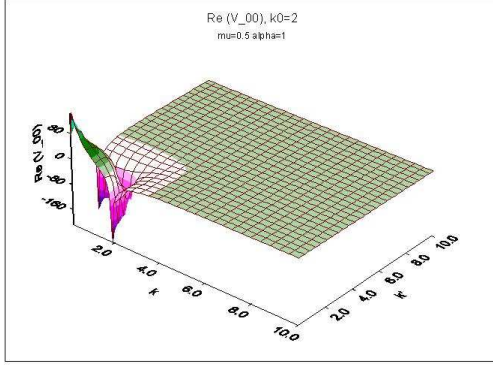
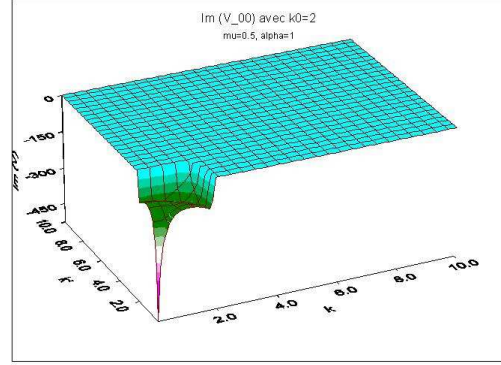


FIG. 4.2 – Matrice $K(k, k_0)$ pour $k_0 = 2$. Choix de grille ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$)

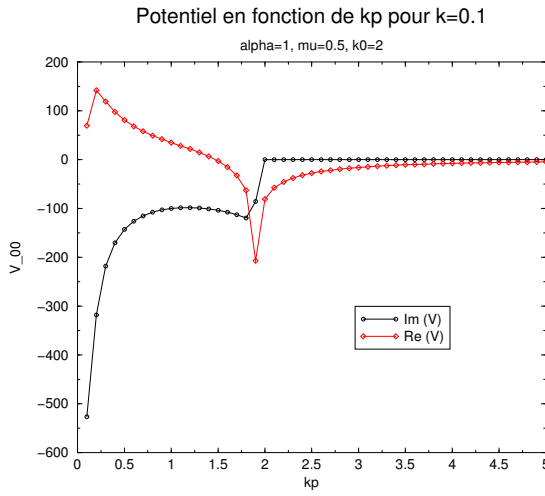
CHAPITRE 4. DIFFUSION RELATIVISTE DANS LE CAS DES PARTICULES SCALAIRES.



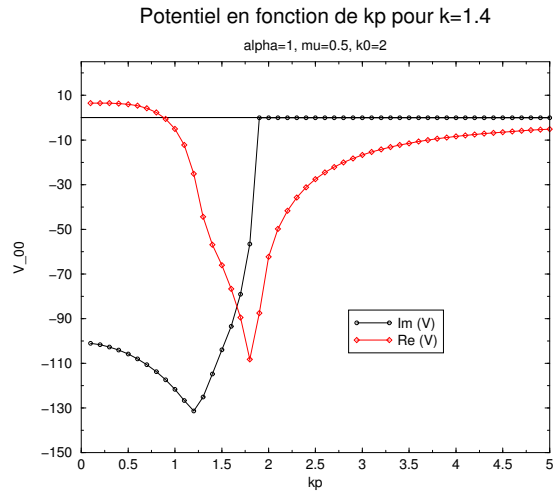
(a) Partie réelle du potentiel V_{00} pour $k_0 = 2$



(b) Partie imaginaire du potentiel V_{00} pour $k_0 = 2$



(c) Potentiel pour $k = 0.1$ (avec $k_0 = 2$). En noir la partie imaginaire, en rouge la partie réelle



(d) Potentiel pour $k = 1.4$ (avec $k_0 = 2$). En noir la partie imaginaire, en rouge la partie réelle

FIG. 4.3 – Potentiel $V_{00}(k, k')$ après intégrations angulaires. Ici, $\alpha = 1$, $\mu = 0.5$

4.5 Résultats pour la diffusion élastique.

4.5.1 Onde S.

Regardons les résultats obtenus pour l'onde S lorsque $T < \mu$, c'est-à-dire, sous le seuil inélastique. Vérifions d'abord si la propriété de «moyenne» sur \hat{n} , observée pour le calcul des états liés, est encore valable, c'est-à-dire, si la restriction du système d'équations couplées à la seule première composante suffit à approcher suffisamment le déphasage «physique».

Calcul à un nombre limité de composantes.

k_0	$\delta'_{\lambda=0}$	$\delta'_{\lambda=0,2}$	$\delta'_{\lambda=0,2,4}$
0.01	39.76	40.35	40.50
0.1	69.60	69.73	69.74
0.3	53.07	53.09	53.09
0.5	41.05	41.06	41.06
0.75	31.28	31.28	31.28

TAB. 4.1 – Onde S : Déphasages réels (en degrés) en fonction du nombre d'ondes partielles prises en compte, en dessous du seuil inélastique (ici $k_s = 0.75$) ($\mu = 0.5$ $\alpha = 1$)

Le tableau (4.1) montre en effet que les déphasages changent peu à partir de deux composantes et qu'il suffit, surtout pour des valeurs de k_0 grandes, de considérer seulement la première composante pour avoir les déphasages avec une très bonne précision, inférieure au millièmme dès que $k_0 > 0.5$. La précision baisse pour des valeurs plus faibles de k_0 mais reste tout de même inférieure à 2%.

Effectuer un calcul à plusieurs composantes a comme conséquence l'apparition de déphasages supplémentaires. En effet, si nous prenons en compte N composantes du développement, la résolution du système d'équations pour la diffusion se traduit par l'obtention de N matrices $\mathcal{K}_{0,\lambda_0=0}, \mathcal{K}_{2,\lambda_0=0}, \dots, \mathcal{K}_{2(N-1),\lambda_0=0}$ solutions du système. Leurs valeurs sur couche permettent d'obtenir des déphasages notés δ_{00}, δ_{20} , etc. Regardons la figure (4.4). Cette figure montre les déphasages obtenus par un calcul à une seule onde partielle (calcul à une composante) et ceux obtenus par un calcul à deux ondes partielles. Comme nous avons constaté dans le tableau (4.1), le déphasage δ_{00} coïncide avec le déphasage obtenu par le calcul à une seule composante. Le deuxième déphasage est de signe négatif et, en comparaison avec δ_{00} , très faible –au moins deux ordres de grandeur plus petits. De plus, le déphasage δ_{20} ne contient aucune information sur le fait que nous nous trouvons dans une configuration proche de l'existence d'un état lié, comme montre le par contre le déphasage δ_{00} .

Les déphasages supplémentaires obtenus par un calcul à trois composantes ou plus sont aussi très faibles. Nous considérons donc que ces déphasages supplémentaires ne correspondent pas à des états physiques, seul le déphasage δ_{00} étant retenu. Comme, par ailleurs, il peut être calculé avec une bonne précision en limitant le calcul à une seule onde partielle, nous nous contenterons par la suite de calculs à une seule composante.

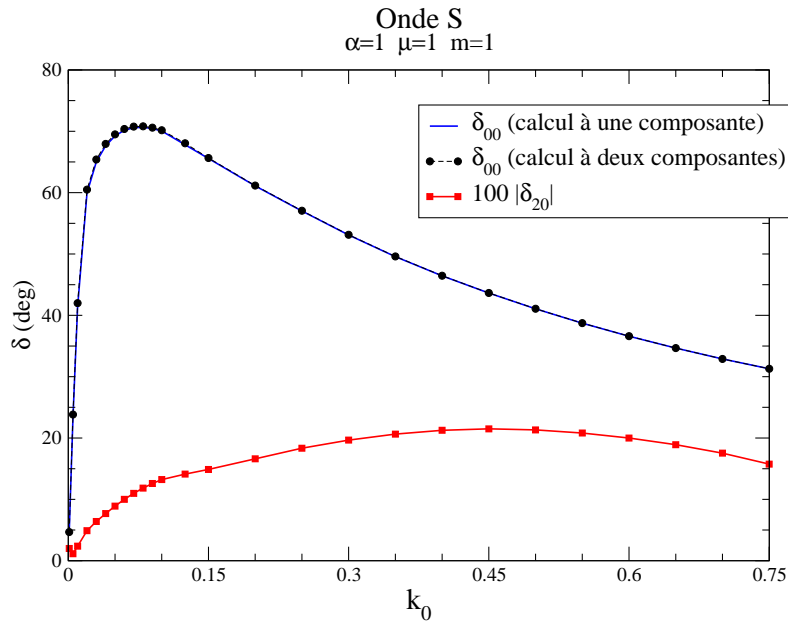


FIG. 4.4 – Onde S : Déphasages correspondant au calcul à une composante, ainsi qu’au calcul à deux composantes ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).

Comparaison avec le cas non relativiste.

Comparons maintenant les résultats obtenus avec les déphasages non relativistes. Une première série de calculs a été faite avec une même constante de couplage α . Il existe une très grande différence entre les déphasages donnés par le modèle de Wick-Cutkosky et par le potentiel de Yukawa. Il s’agit d’un résultat attendu car pour une même constante de couplage les deux modèles ne possèdent pas le même spectre. Nous nous attendons donc à voir des déphasages pouvant être très différents à basse énergie.

Un telle situation est montrée dans la figure (4.5). Cette figure — obtenue pour une constante de couplage $\alpha = 1$ et une masse échangée $\mu = 0.5$ — montre un déphasage non-relativiste correspondant à un système possédant un état lié, tandis que le cas relativiste correspond à un système non lié. Les déphasages à basse énergie sont à l’évidence très différents, ainsi que les déphasages proches du seuil inélastique, où l’écart entre le cas non relativiste et le cas relativiste est de plus d’un tiers.

La figure (4.6) montre les déphasages pour $\mu = 0.25$ et la même constante de couplage. Tant le modèle relativiste que le modèle non-relativiste prévoient, chacun, un état lié, à des énergies bien distinctes. Bien entendu, les paramètres à basse énergie sont très différents. Les déphasages ont encore un écart de plus d’un tiers près du seuil de création.

En réalité, c’est une erreur d’effectuer les calculs avec une même constante de couplage. En effet, nous traitons ainsi des systèmes physiques complètement différents. Il est plus intéressant d’étudier des systèmes plus proches au point de vue physique. Pour cela, regardons maintenant des systèmes ayant un même état lié, en ajustant les constantes de

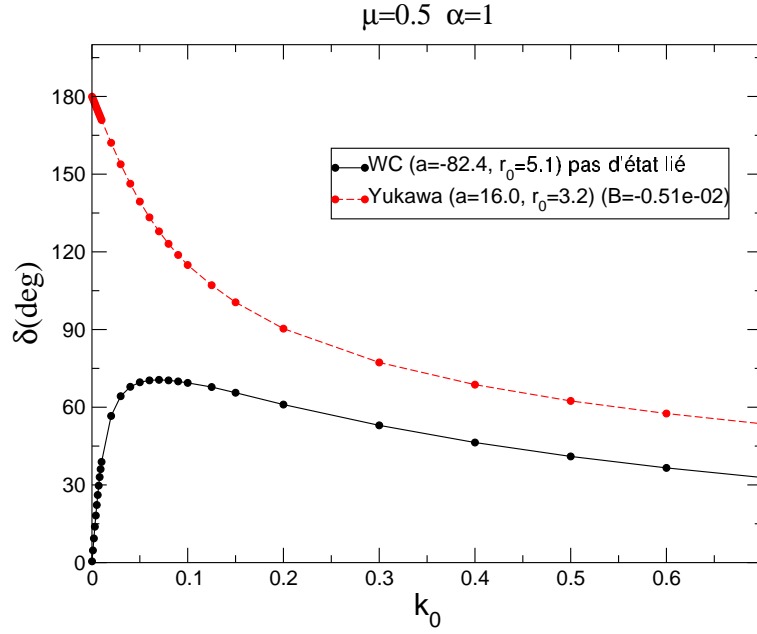


FIG. 4.5 – Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$. Ici, le système non-relativiste a un état lié, à la différence du cas non relativiste.

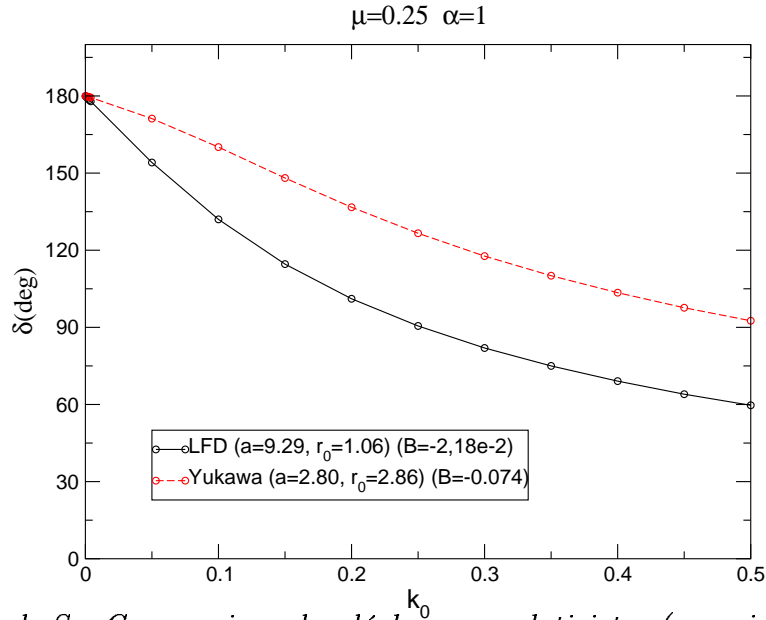


FIG. 4.6 – Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.25$. Dans les deux, nous sommes en présence d'un état lié.

couplage pour obtenir une même énergie de liaison.

Regardons d'abord un système faiblement lié ($B = 0.001$). La figure (4.7) montre les déphasages pour $\mu = 0.15$ et $\mu = 1$. Par construction, les déphasages à basse énergie sont en effet très proches mais s'éloignent progressivement jusqu'au seuil inélastique.

Pour savoir si la masse échangée μ a une influence importante dans cet écart, regardons les mêmes graphes à la même échelle. Ceci est montré dans la figure (4.8). Remarquons que pour $k_0 = 0.35$, l'écart relatif entre les déphasage relativistes et non relativistes est comparable : autour de 10%. La valeur de μ ne semble pas avoir une incidence importante dans cet écart relatif.

La figure (4.9) montre à la même échelle les déphasages correspondant à des énergies de liaison différentes pour un système de $\mu = 0.5$. Ici encore, les écarts relatifs restent du même ordre pour une valeur de k_0 donnée.

Dans la figure (4.10) est représenté le cas où il n'y a pas d'état lié. Dans ce cas, nous avons ajusté la constante de couplage pour obtenir la même longueur de diffusion a . La portée effective r_0 est par contre différente. L'écart relatif au seuil reste de même ordre que celui observé dans le cas où nous avons un état faiblement lié, de l'ordre d'un tiers (cf. figure (4.7)).

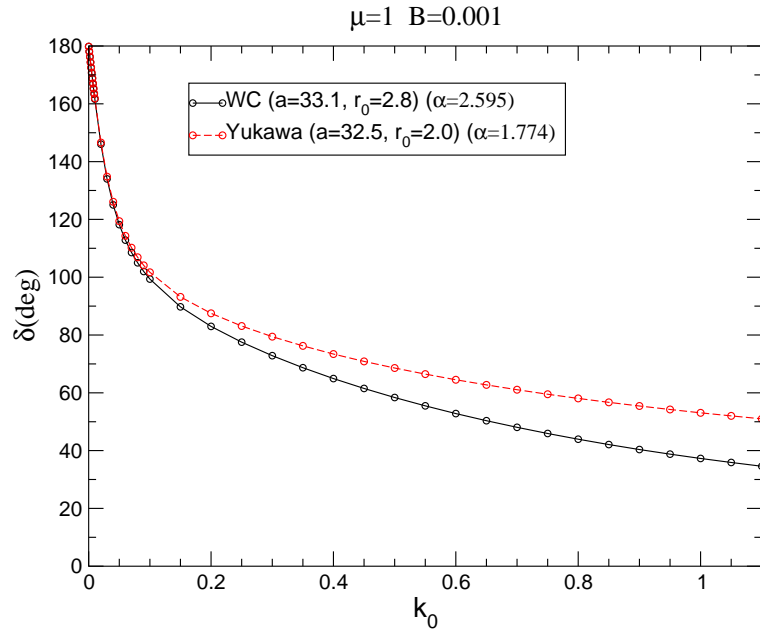
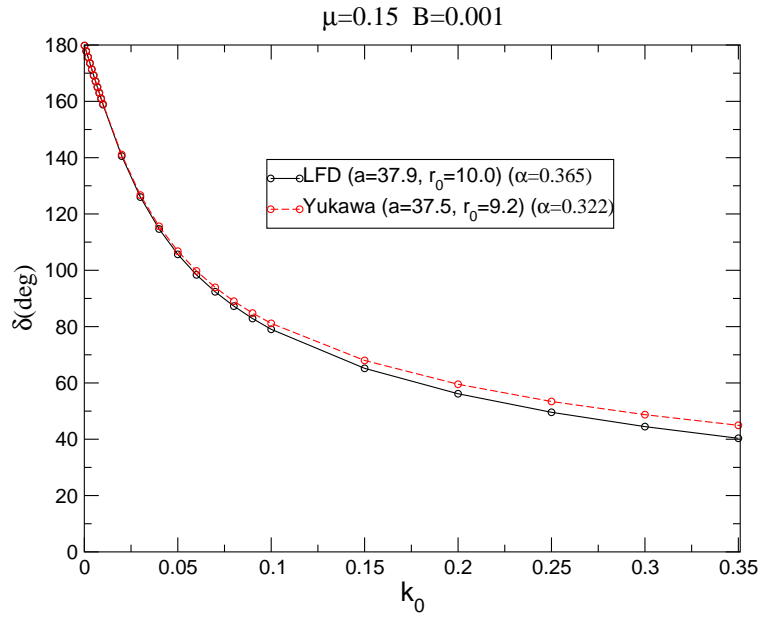
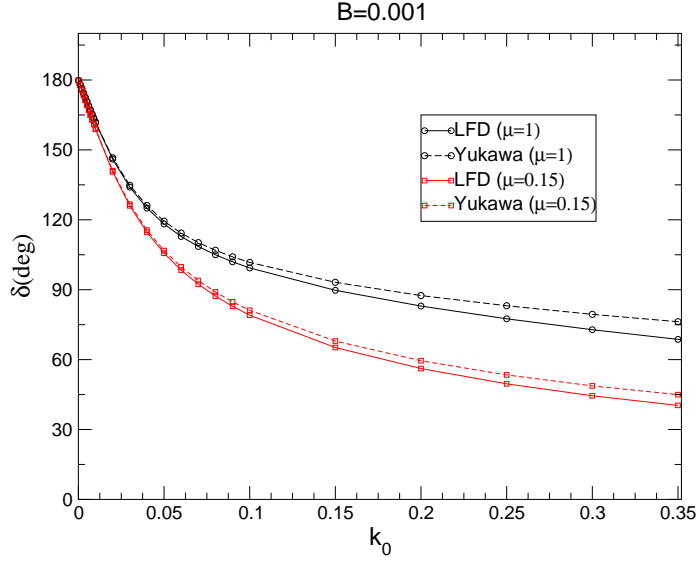


FIG. 4.7 – Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour des systèmes ayant le même spectre ($B = 0.01$) avec $\mu = 0.5$



(a) $\mu = 1$

FIG. 4.8 – Onde S : Mêmes déphasages présentés aux graphes précédents ($B = 0.001$) à la même échelle

4.5.2 Onde P .

Calculons maintenant les déphasages pour l'onde P . Tout d'abord, vérifions que l'approximation consistant à réduire le système d'équations couplées à son premier terme est encore valable.

Le tableau (4.2) montre les déphasages $\delta_{1,\lambda_0=1}$ calculés à une, deux ou trois composantes du développement. Deux cas de figure existent : $\mu_0 = 0$ et $\mu_0 = 1$. Remarquons que ces déphasages sont calculés avec une précision supérieure à 0.1% avec la seule première composante du développement sur la base d'harmoniques sphériques. Nous constatons la même situation observée dans le cas de l'onde S , les déphasages d'ordre supérieur $\delta_{3,\lambda_0=1}$, $\delta_{5,\lambda_0=1}$, etc. étant très faibles en comparaison à $\delta_{1,\lambda_0=1}$. Par la suite, nous ne considérons comme déphasages de l'onde P que $\delta_{1,\lambda_0=1}^\mu$. Ces déphasages sont calculés en limitant le développement en ondes partielles à une seule composante.

Déphasages physiques.

Pour obtenir le déphasage «physique» correspondant à l'onde P , nous allons utiliser la définition (4.9) pour calculer une valeur moyenne sur μ de la matrice \mathcal{K} . Or nous savons que le signe de μ ne joue aucun rôle physique et donc que $\mathcal{K}_{11}^{(1)} = \mathcal{K}_{11}^{(-1)}$. Nous avons alors :

$$\bar{\mathcal{K}}_{\lambda_0=1}(k_0, k_0) = \frac{1}{3}\mathcal{K}_{11}^{(0)}(k_0, k_0) + \frac{2}{3}\mathcal{K}_{11}^{(1)}(k_0, k_0)$$

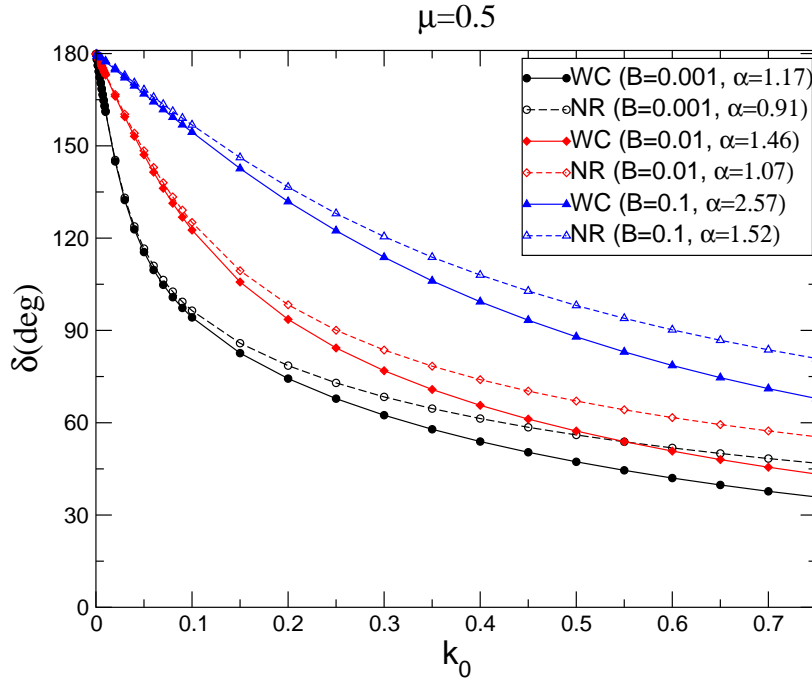
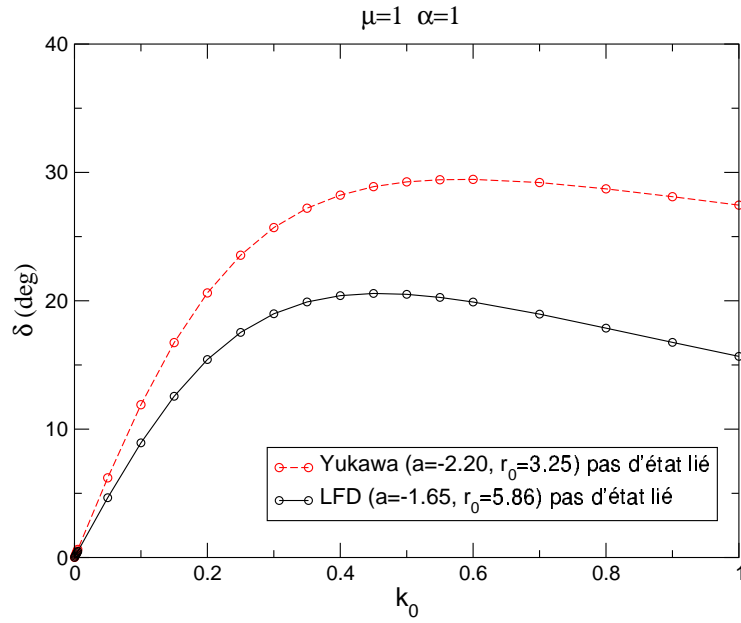


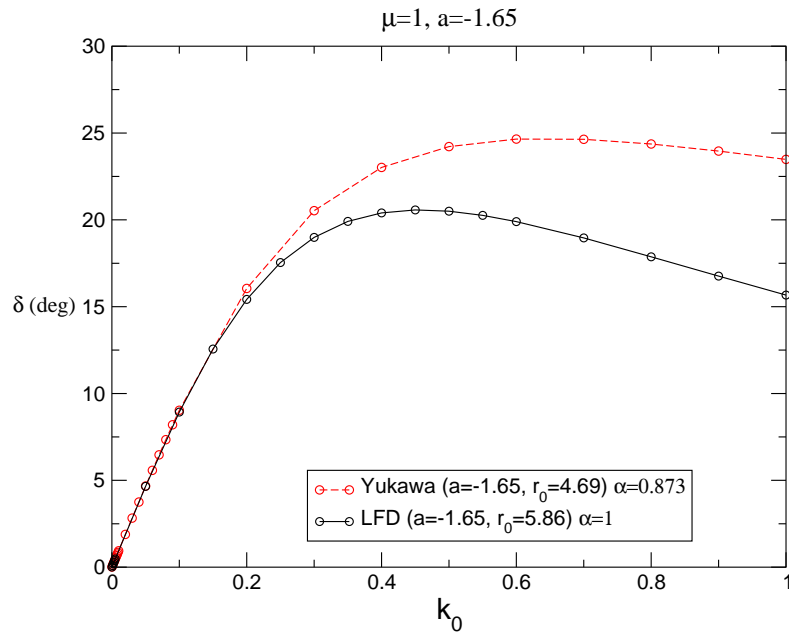
FIG. 4.9 – Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en lignes continues) et non relativistes (en traits discontinus) pour des systèmes ayant le même spectre : $B = 0.001$ (en noir), $B = 0.01$ (en rouge) et $B = 0.1$ (en bleu), avec $\mu = 0.5$

k_0	Onde	$\delta'_{\lambda=1}$	$\delta'_{\lambda=1,3}$	$\delta'_{\lambda=1,3,5}$
0.1	P_0	0.587	0.589	0.589
	P_1	0.570	0.570	0.570
0.3	P_0	6.998	7.013	7.015
	P_1	6.698	6.701	6.701
0.5	P_0	11.84	11.86	11.86
	P_1	11.22	11.22	11.22
0.75	P_0	12.96	12.96	12.96
	P_1	12.24	12.24	12.24

TAB. 4.2 – Onde P_0 : Déphasages réels (en degrés) en fonction du nombre d'ondes partielles prises en compte, en dessous du seuil inélastique (ici $k_s = 0.75$) ($\mu = 0.5$ $\alpha = 1$)



(a) Même valeur de α



(b) α_{Yuk} est ajustée pour obtenir la même valeur de a

FIG. 4.10 – Onde S : Comparaison du déphasage obtenu par modèle de Wick-Cutkosky et par un calcul non relativiste pour des systèmes non liés. Nous avons fixé une même valeur de a ($a = -1.65$)).

4.5. RÉSULTATS POUR LA DIFFUSION ÉLASTIQUE.

D'où, d'après la relation (4.10), nous pouvons tirer une relation entre le déphasage physique –que nous notons δ_P ou $\delta_{P_{phys}}$ – et les déphasages correspondant à $(\lambda_0 = 1, \mu_0 = 0)$ et $(\lambda_0 = 1, \mu_0 = 1)$, notés respectivement δ_{P_0} et δ_{P_1} :

$$\tan \delta_P = \frac{1}{3} \tan \delta_{P_0} + \frac{2}{3} \tan \delta_{P_1} \quad (4.19)$$

Lorsque les déphasages sont complexes (avec $\delta = \delta' + i\delta''$), nous utilisons la relation suivante :

$$\tan(\delta' + i\delta'') = \frac{\sin \delta' \cos \delta'}{\cos^2 \delta' + \sinh^2 \delta''} + i \frac{\sinh \delta'' \cosh \delta''}{\cos^2 \delta' + \sinh^2 \delta''}$$

ainsi que la relation (4.12) pour retrouver le déphasage physique à partir des déphasages δ_{P_0} et δ_{P_1} .

Regardons le cas d'un système où il n'existe d'état lié, ni pour l'onde P_0 , ni pour l'onde P_1 . Un tel cas est montré dans la figure (4.11), où est aussi montré le déphasage correspondant pour l'onde S (qui ne possède pas non plus d'état lié). Les déphasages correspondant aux cas $\mu = 0$ et $\mu = 1$ sont très proches. Ils sont inférieurs au déphasage correspondant pour l'onde S –qui est montré en encadré. Ce dernier croît très vite et passe par un maximum autour de 75° avant $k = 0.1$ pour redescendre vers une valeur proche de 30° près du seuil, tandis que les déphasages P_0 et P_1 s'accroissent lentement pour arriver à un maximum proche de 12° au seuil. Les deux déphasages sont presque confondus jusqu'à une impulsion $k_0 = 0.2$. Le déphasage «physique» est à tout moment encadré par les déphasages non-physiques.

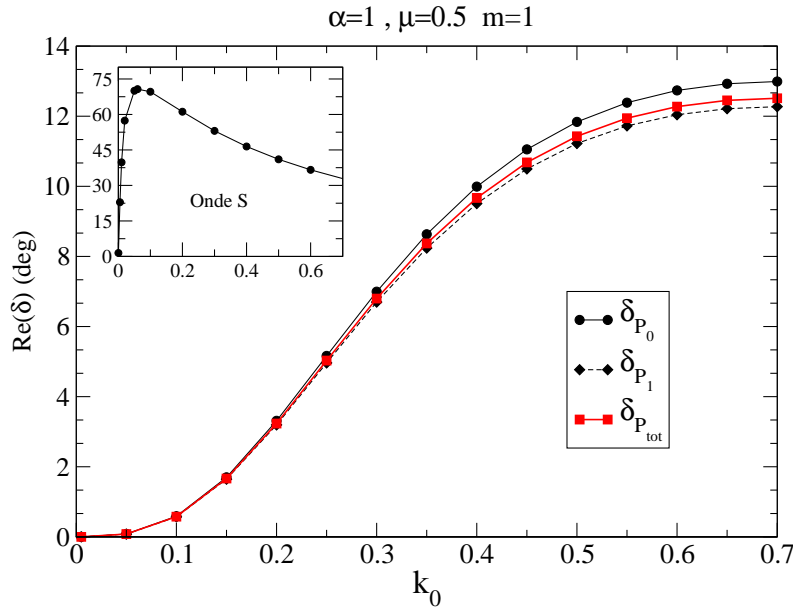


FIG. 4.11 – Onde P : Déphasages pour les ondes P_0 et P_1 (en noir) ainsi que déphasage «physique» (en rouge) avant le seuil, à l'approximation ladder ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). En encadré, le déphasage correspondant à l'onde S pour ces mêmes paramètres.

Considérons maintenant le cas où les deux ondes non-physiques P_0 et P_1 correspondent à des systèmes ayant chacun un état lié. La figure (4.12) montre une telle configuration ($\alpha = 10, \mu = 0.5$). Le déphasage «physique» est encadré entre les déphasages non-physiques et correspond à un système ayant un état lié.

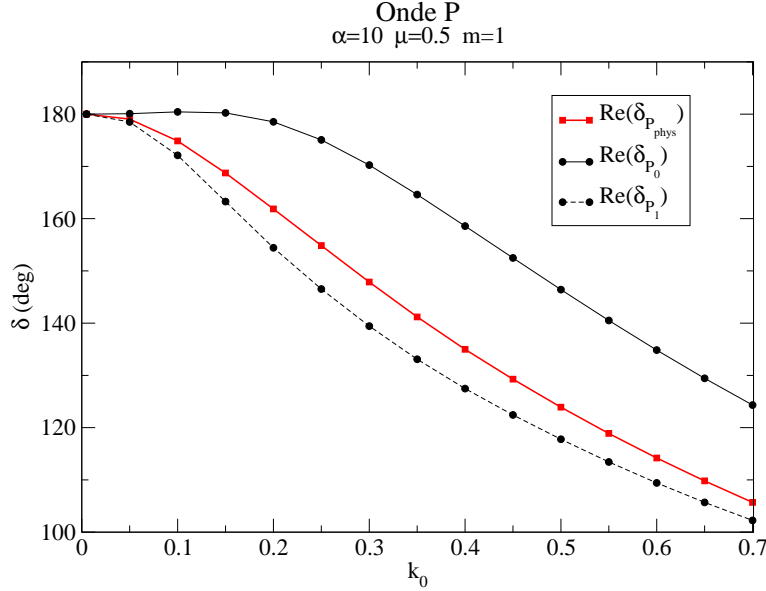


FIG. 4.12 – *Onde P* : Comparaison des déphasages «physiques» et «non-physiques», lorsque les deux solutions non-physiques correspondent à un système ayant un état lié ($\alpha = 10$ et $\mu = 0.5$).

Pour finir, regardons ce qui arrive si seule l'une des solutions non-physiques correspond à un système possédant un état lié. La figure (4.13) montre le déphasage «physique» obtenu en utilisant la même procédure. Le déphasage physique correspond à une configuration dépourvue d'états liés, et est très proche du déphasage P_1 , même pour des énergies importantes. Ce résultat est étrange, car loin du voisinage $k_0 \sim 0$, le système doit être insensible aux états liés. Dans ce cas, nous nous attendons à un déphasage physique compris entre les deux déphasages non-physiques, ce qui n'est pas le cas ici. Le problème s'aggrave pour des énergies plus importantes, où il est plus difficile d'interpréter le déphasage physique obtenu. Le problème de ces états intermédiaires, où les solutions non-physiques du système ont des comportements très différents est délicat à traiter. Ce problème apparaît tout aussi bien pour les états de diffusion que pour les états liés. En effet, il est difficile de déterminer, lorsque une solution correspond à un système lié et l'autre à un système non lié, quelle superposition des vecteurs d'état correspond à l'état physique. Ce problème n'a pas été résolu.

Autres résultats.

Comparons maintenant le déphasage «physique» relativiste avec le déphasage non relativiste. Ceci est fait dans la figure (4.14).

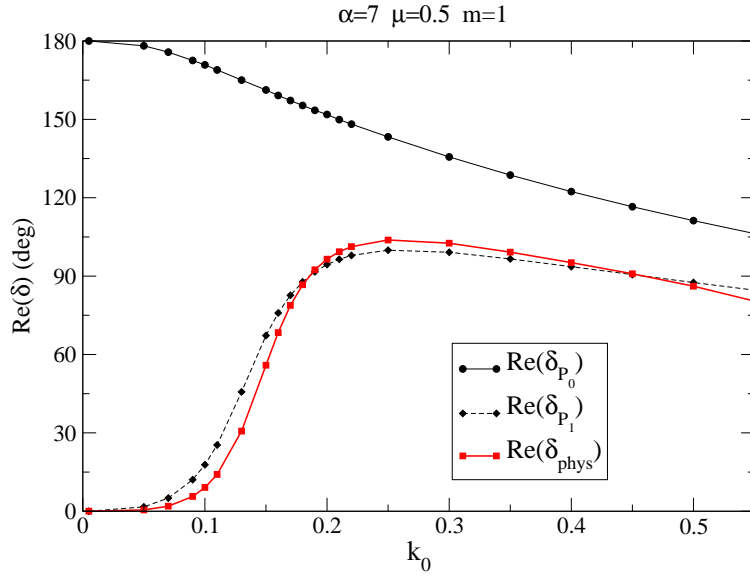


FIG. 4.13 – Onde P : Comparaison des déphasages «physiques» et «non-physiques», lorsque une solution non-physique correspond à un système ayant un état lié et l'autre non. ($\alpha = 7$ et $\mu = 0.5$).

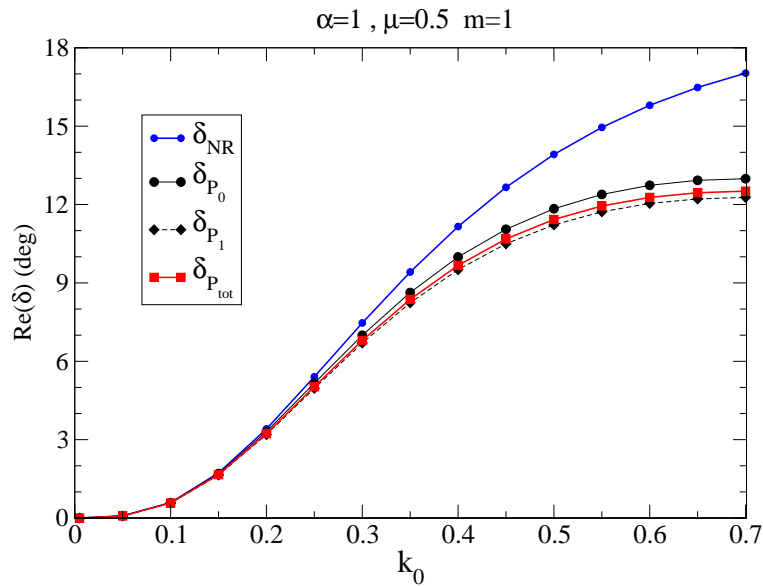


FIG. 4.14 – Onde P : Comparaison des déphasages non-relativistes et relativistes (solutions non-physiques et solution physique), avant le seuil, à l'approximation ladder ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).

Comparons maintenant les déphasages de l'onde P avec ceux de l'onde S . Le déphasage «physique» correspondant à l'onde P est inférieur – en module – à 5° , ce qui représente presque un ordre de grandeur de moins par rapport à l'onde S au seuil. C'est encore plus marquant pour les sections efficaces correspondantes :

$$\sigma_{\lambda_0} = \frac{4\pi}{k^2} (2\lambda_0 + 1) \sin^2 \delta_{\lambda_0}$$

La figure (4.15) montre en effet les sections efficaces correspondantes à l'onde S et à l'onde P «physique» pour une masse échangée de $\mu = 0.5$ et pour une constante de couplage $\alpha = 1$. Dans ce graphe, la section efficace totale est complètement dominée par l'onde S pour les faibles valeurs de k_0 . L'écart se réduit à un ordre de grandeur près du seuil.

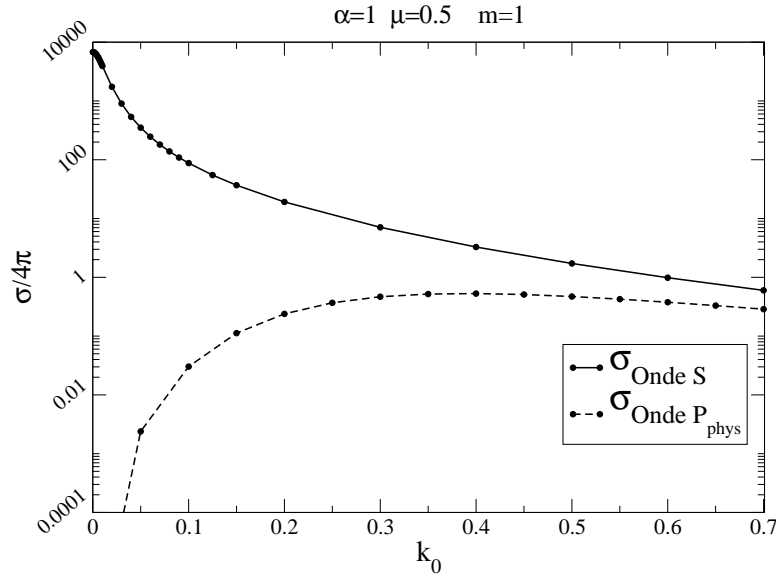


FIG. 4.15 – Comparaison entre les sections efficaces correspondantes à l'onde S et l'onde P_{phys} . ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).

Discussion sur l'effet de \hat{n} dans les déphasages.

La décomposition angulaire choisie permettrait, si toutes les ondes partielles étaient prises en compte, de décrire correctement la dépendance en \hat{n} . Lorsque le calcul est limité à une onde seule composante, la dépendance en \hat{n} est encore prise en compte, mais les résultats correspondent, comme dans le cas des états liés, à un potentiel effectif «moyenné» selon \hat{n} . Or, ce potentiel «moyenné» est suffisant pour décrire avec une très bonne précision le cas des états liés. Ce comportement doit se retrouver aussi pour les états de diffusion. Remarquons cependant que les déphasages sont extraits de l'élément de matrice $\mathcal{K}_{\lambda_0=0,0}(k_0, k_0)$. Nous négligeons dans notre analyse l'apparition de déphasages *spurioux*

correspondant aux éléments de matrice suivants dans le développement $\mathcal{K}_{2,\lambda_0=0}, \mathcal{K}_{4,\lambda_0=0}$, etc.

Ji et Surya [38] ont étudié la diffusion dans un modèle scalaire identique au notre, utilisant l'approche standard (non-explicitement covariante) de la LFD. Ils ont choisi un repère où l'axe \hat{z} est colinéaire à l'onde incidente, le plan de la diffusion étant perpendiculaire à l'axe \hat{x} . Les déphasages sont calculés en choisissant la direction du cône de lumière \hat{n} selon les axes \hat{x}, \hat{y} et \hat{z} . Ces trois configurations sont notées X-DIR, Y-DIR et Z-DIR¹¹. Ils ont pris comme paramètres $\mu = m = 1$ et différentes valeurs de la constante de couplage $\beta = \frac{\alpha}{\pi}$. Dans cet article, ils comparent leurs résultats aux déphasages correspondant à l'équation de Bethe-Salpeter.

Comparons nos résultats à leurs calculs. La figure (4.16) montre les déphasages pour l'onde S pour des constantes de couplage $\beta = 0.1, 0.32$ et 0.7 . Nos déphasages sont obtenus en limitant le développement à une seule onde partielle. Ces résultats ne diffèrent guère (à la précision discernable dans le graphe) avec les déphasages calculés à deux ondes partielles.

Regardons tout d'abord le cas où $\beta = 0.1$. Pour cette constante de couplage, les déphasages calculés suivant les trois directions de \hat{n} , ainsi qu'avec Bethe-Salpeter, coïncident. C'est aussi notre cas. Lorsque la constante de couplage est plus importante, ils observent une levée de dégénérescence. Lorsque $\beta = 0.32$, le déphasage X-DIR dévient légèrement plus important que les autres. Notre calcul coïncide avec ces derniers. Enfin, lorsque $\beta = 0.7$, il apparaît un comportement nouveau, le déphasage X-DIR différant dans son comportement général des autres déphasages par l'apparition d'un état lié. Notre calcul nous donne alors des déphasages très proches du calcul par l'équation de Bethe-Salpeter. Remarquons en particulier que notre déphasage ne coïncide pas avec le déphasage Z-DIR.

Ji et Surya ont effectué des calculs pour des constantes de couplage encore plus importantes. La figure (4.17) montre les mêmes déphasages que précédemment, pour $\beta = 1, 5$ et 10 . Pour $\beta = 1$, ils trouvent encore des déphasages proches pour \hat{n} selon les axes \hat{y} et \hat{z} , ainsi que Bethe-Salpeter. Notre déphasage pour cette constante de couplage coïncide avec ce dernier. Le déphasage selon \hat{x} est entre 10 et 15% plus grand.

Pour $\beta = 5$ et $\beta = 10$, par contre, ils obtiennent des déphasages très différents selon les directions de \hat{n} , ainsi que pour le calcul avec l'équation de Bethe-Salpeter. Nos calculs à une onde partielle fournissent des déphasages proches à ceux obtenus par Bethe-Salpeter, mais ils sont instables lorsque le calcul est étendu à d'autres ondes partielles.

Pour expliquer cette différence de comportement en fonction de la valeur de la constante de couplage, regardons pour quelles valeurs de α le système présente un état lié. Ce calcul est présenté dans la figure (4.18), qui montre l'évolution de l'énergie de liaison de l'état lié en fonction de la constante de couplage. Le système présente un état lié de énergie de liaison nulle pour $\beta = \frac{\alpha}{\pi} = 0.77$, pour atteindre une énergie de liaison maximale $B = 2m$ lorsque $\beta = 3.6$.

Les déphasages montrés dans la figure (4.17) indiquent la présence d'un état lié pour

11. Dans notre cas, nous fixons l'axe \hat{z} colinéaire à \hat{n} , les directions de l'onde incidente et diffusée étant paramétrées par les angles $\hat{k}_0 \cdot \hat{n}$ et $\hat{k} \cdot \hat{n}$. Les trois cas correspondent à :

$$X - DIR = \begin{cases} \hat{k}_0 \cdot \hat{n} = 0 \\ \hat{k} \cdot \hat{n} = 0 \end{cases} \quad Y - DIR = \begin{cases} \hat{k}_0 \cdot \hat{n} = 0 \\ \hat{k} \cdot \hat{n} = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad Z - DIR = \begin{cases} \hat{k}_0 \cdot \hat{n} = 1 \\ \hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta \end{cases}$$

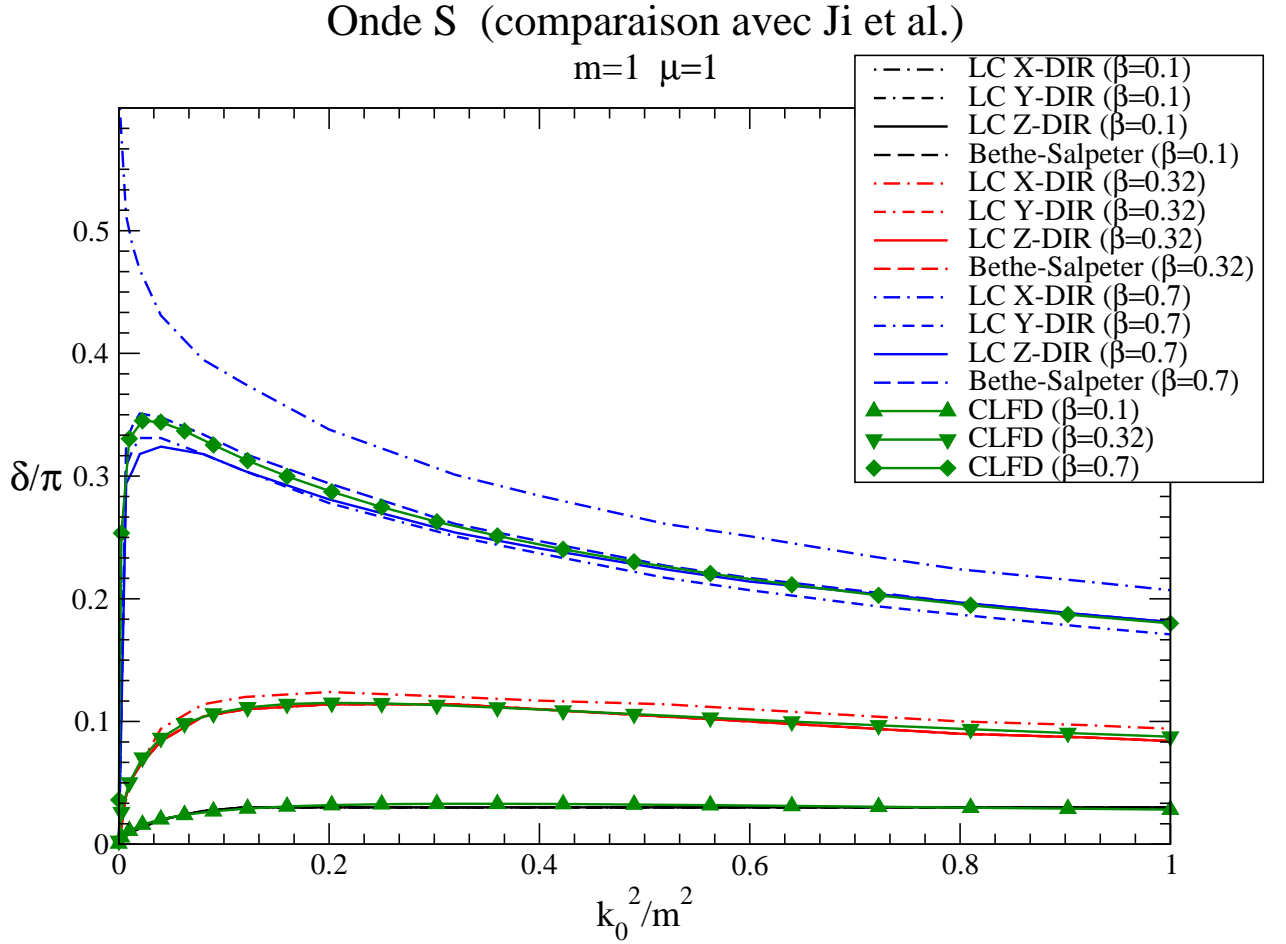


FIG. 4.16 – Onde S : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya [38]. Les déphasages de ces derniers sont pris de la figure 1 de leur article, en respectant leurs notations. Nous avons $\beta = 0.1$ (en noir), $\beta = 0.3$ (en rouge) et $\beta = 0.7$ (en bleu). Pour rappel, $\beta = \frac{\alpha}{\pi}$. En vert, nos résultats. Tous les calculs sont fait avec $\mu = m = 1$.

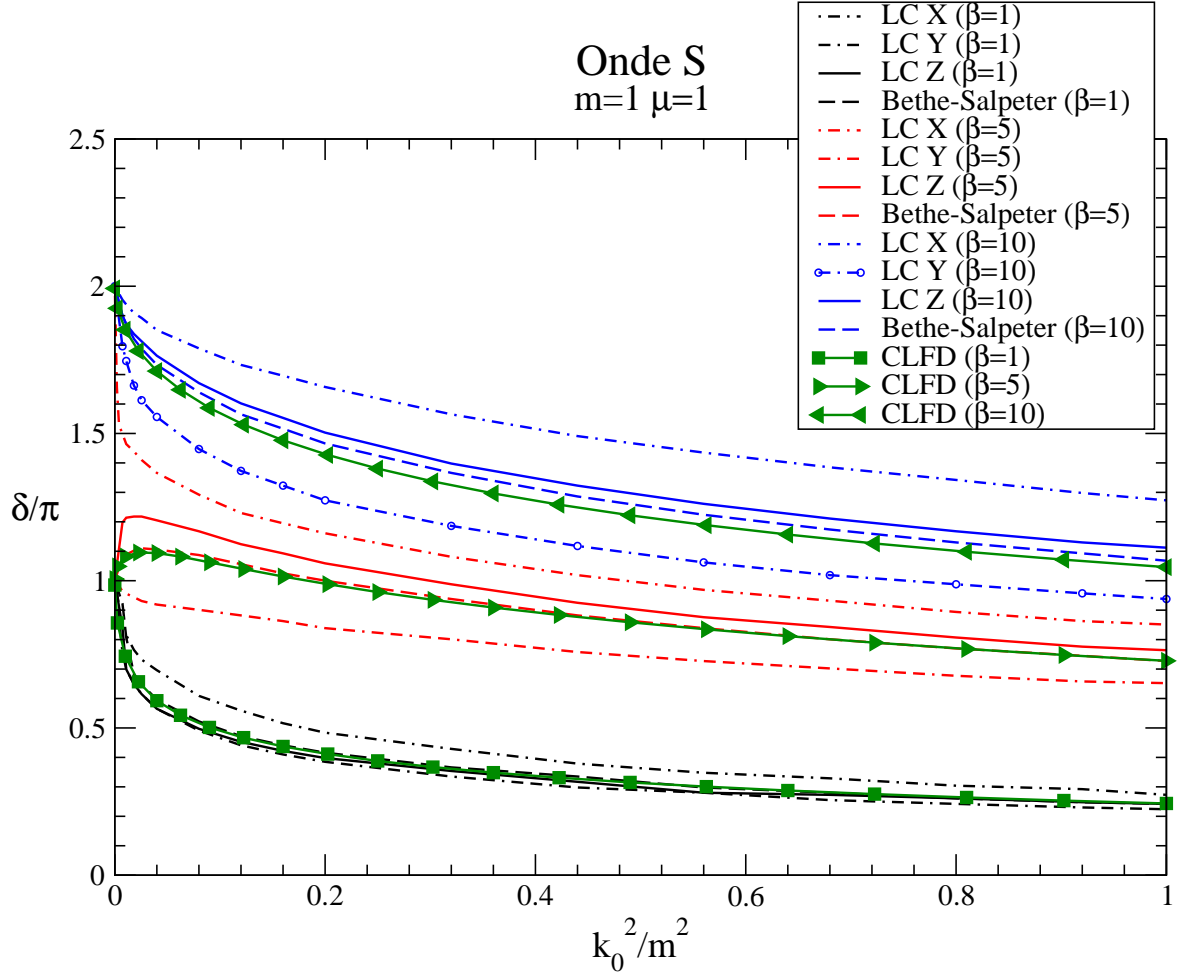


FIG. 4.17 – Onde S : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya [38]. Les déphasages de ces derniers sont pris de la figure 2 de leur article, en respectant leurs notations. Nous avons $\beta = 1$ (en noir), $\beta = 5$ (en rouge) et $\beta = 10$ (en bleu). Pour rappel, $\beta = \frac{\alpha}{\pi}$. En vert, nos résultats. Tous les calculs sont fait avec $\mu = m = 1$.

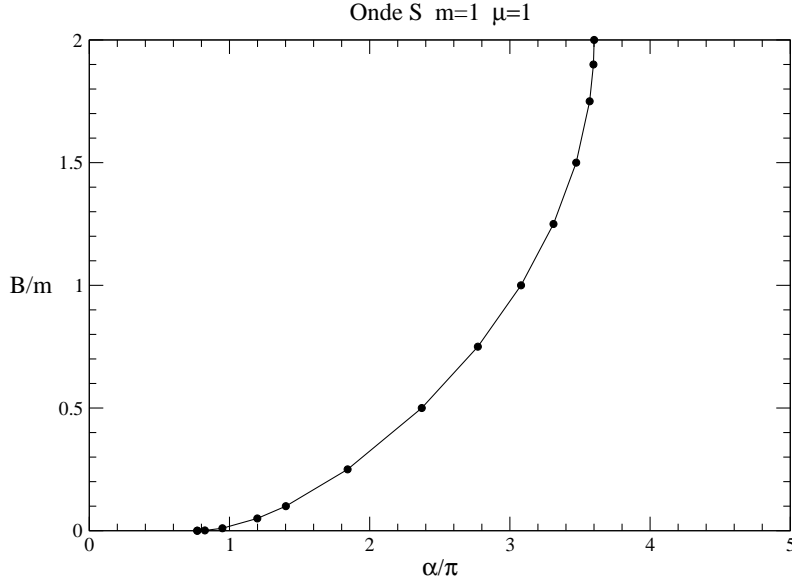


FIG. 4.18 – *Onde S* : Énergie de liaison de l'état lié en fonction de la constante de couplage, pour $\mu = m = 1$.

$\beta = 1$, ce qui est compatible avec le calcul direct des états liés. Ils montrent cependant la présence d'un ou deux états liés pour $\beta = 5$ et 10 , ce qui semble contradictoire. Ce paradoxe apparent provient du fait que les potentiels de la LFD font intervenir le carré de la masse totale du système $M = 2m - B$. Le paramètre M^2 peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, correspondant à des énergies de liaison non-bornées. Les déphasages correspondant aux constantes de couplage $\beta > 3.6$ correspondent à des systèmes ayant un ou plusieurs états liés dont l'état fondamental a des énergies de liaison $B > 2m$. De telles configurations ne sont pas physiques, ce qui peut expliquer la forte dépendance en \hat{n} observée par Ji et Surya, ainsi que l'instabilité de nos calculs avec plusieurs ondes partielles. Le calcul à une seule composante donne néanmoins un résultat proche du calcul par Bethe-Salpeter, car il s'agit d'une moyenne sur toutes les directions de \hat{n} .

Reste à considérer le cas $\beta = 0.7$, où Ji et Surya observent un état lié pour $\hat{n} \parallel \hat{x}$. Une telle valeur de la constante de couplage est proche de la valeur limite $\beta = 0.77$ à partir de laquelle un état lié existe, ce qui peut expliquer cette différence de comportement. Tous nos calculs ont été effectués en prenant des paramètres m, μ, α tels que, lorsqu'un état lié existe, il ait une énergie de liaison «physique», c'est-à-dire $B \in [0, 2m]$.

En ce qui concerne l'onde P , la figure (4.19) montre les déphasages pour $\beta = \frac{\alpha}{\pi} = 1, 3$ calculés par Ji et Surya. Nos déphasages «physiques» sont compris entre les différents déphasages calculés selon les trois direction de \hat{n} . Pour $\beta = 1$ nous avons des déphasages presque confondus entre eux, ce qui n'est plus le cas pour $\beta = 3$. Notre déphasage physique est dans ce cas légèrement supérieur au déphasage de Bethe-Salpeter.

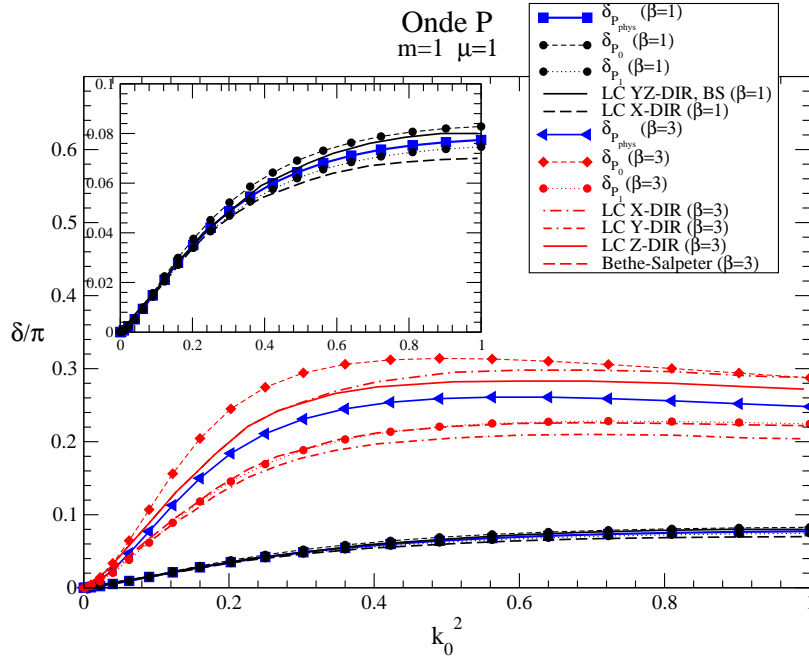


FIG. 4.19 – Onde P : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya pour deux valeurs de la constante de couplage, pour $\mu = m = 1$. En bleu nos résultats «physiques».

4.6 Résultats pour la diffusion inélastique.

Regardons maintenant les déphasages imaginaires calculés. Il existe une contrainte forte sur ces déphasages, provenant de l'unitarité de la matrice S . En effet, pour un processus élastique, chaque onde partielle s_l de la matrice S doit respecter l'unitarité et obéir à la relation $|s_l|^2 = 1$. Pour un processus inélastique, une partie du flux de probabilité est emporté par le canal inélastique. Dans ce cas, la relation que chaque onde partielle s_l doit respecter pour préserver l'unitarité de la matrice S est l'inégalité :

$$s_l(k) s_l^\dagger(k) \leq 1$$

Ceci implique que, quelque soit l'onde partielle, le module au carré de s_l doit être inférieur à l'unité : $|s_l|^2 = |e^{i4\delta_l}| = e^{-4\delta''} \leq 1$, c'est-à-dire, que tout déphasage imaginaire doit être positif. Il est d'usage d'introduire un paramètre $\eta = e^{-2\delta''}$ nommé *facteur d'absorption ou inélasticité*. Ce paramètre est compris entre 0 et 1.

La figure (4.20) montre les déphasages inélastiques au voisinage du seuil de création pour l'onde S et les deux cas possibles pour l'onde P . Bien que le déphasage imaginaire soit positif dans le cas de l'onde S , ce n'est pas du tout le cas pour l'onde P . Les déphasages –non-physiques– correspondant à l'onde P_0 sont négatifs, ainsi que ceux de l'onde P_1 (plus faibles d'un ordre de grandeur par rapport aux déphasages pour P_0). Dès lors, comment croire à la validité de ces résultats ? La question se pose de savoir si cette perte d'unitarité a pour origine un artefact numérique, s'il s'agit d'un problème dû au fait que nous calculons des déphasages non physiques, états propres de l'opérateur \hat{A}^2 qui n'obéissent pas à toutes

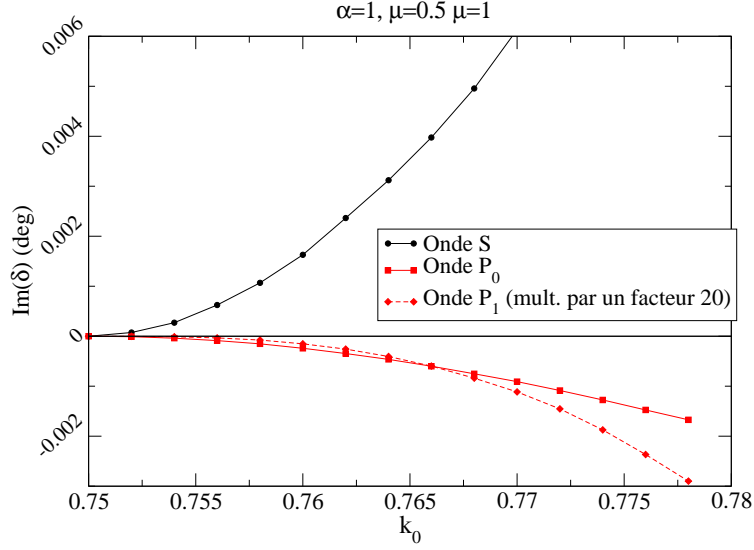


FIG. 4.20 – Déphasage imaginaire au voisinage du seuil. Ici, $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$ (seuil à $k_0 = 0.75$) pour différentes ondes partielles.

les équations de la LFD ou bien, s'il s'agit d'un défaut propre à l'approximation *ladder*.

La deuxième hypothèse est fausse. En effet, nous pouvons obtenir le déphasage inélastique «physique» à partir des déphasages P_0 et P_1 , ce qui est montré dans la figure (4.21). Notons que dans ce cas, le déphasage P_0 devient positif pour $k_0 > 1.3$. Le déphasage «physique» reste néanmoins toujours négatif.

Il reste toujours l'hypothèse d'une erreur lors de la résolution numérique. Nos calculs numériques ont été testés en utilisant un potentiel séparable [40], pour lequel une résolution analytique est possible. Le programme fonctionnant correctement avec ce genre de potentiels, nous devons donc vérifier que les noyaux sont correctement calculés pour notre modèle scalaire. Nous allons, dans ce qui suit, comparer nos résultats inélastiques avec quelques résultats analytiques obtenus au voisinage du seuil afin de vérifier, d'abord, la validité de notre calcul numérique, et ensuite, essayer de comprendre l'origine de cette perte de l'unitarité de la matrice S .

4.6.1 Évolution du déphasage imaginaire en fonction de α au voisinage du seuil.

Tout d'abord regardons le comportement général du déphasage imaginaire en fonction de α . Pour avoir une observable (le déphasage, par exemple), ne considérons que l'expression sur couche $\mathcal{K}_{(k_0, k_0)}$. De façon schématique, nous pouvons écrire l'équation pour la diffusion sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{(k_0, k_0)} &= V_{(k_0, k_0)} + V_{(k_0, k')} G_{(k', k_0)}^0 \mathcal{K}_{(k', k_0)} \\ &= V_{(k_0, k_0)} + V_{(k_0, k')} G_{(k', k_0)}^0 V_{(k', k_0)} + V_{(k_0, k'')} G_{(k'', k')}^0 V_{(k'', k')} G_{(k', k_0)}^0 \mathcal{K}_{(k', k_0)} \end{aligned}$$

4.7. ORIGINE DE LA BRISURE D'UNITARITÉ DE LA MATRICE S À L'APPROXIMATION *LADDER*.

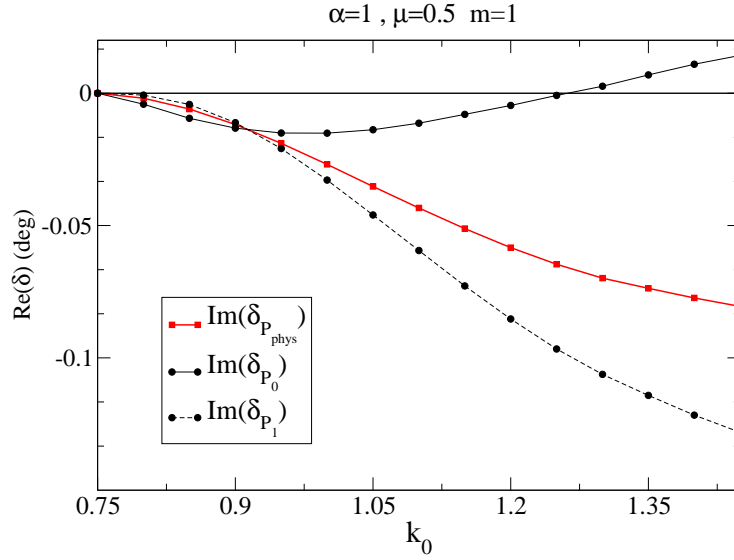


FIG. 4.21 – Onde P : Déphasages imaginaires pour les ondes P_0 et P_1 (en noir) ainsi que déphasage «physique» (en rouge) à l'approximation ladder ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). Le déphasage «physique» est toujours négatif et viole donc l'unitarité de la matrice S .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{(k_0, k_0)} = & V_{(k_0, k_0)} + V_{(k_0, k')} G_{(k', k_0)}^0 V_{(k', k_0)} + V_{(k_0, k''')} G_{(k''', k'')}^0 V_{(k'', k')} G_{(k'', k')}^0 V_{(k', k_0)} \\ & + V_{(k_0, q)} G_{(q, k''')}^0 V_{(q, k''')} G_{(k''', k'')}^0 V_{(k'', k')} G_{(k', k_0)}^0 \mathcal{K}_{(k', k_0)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le potentiel sur demi-couche $V_{(k, k_0)}$ ne fournit aucune contribution imaginaire. Il suit que les deux premiers termes de l'équation (4.20) sont réels et que toute contribution imaginaire n'apparaît qu'à partir du troisième terme (en V^3). Le déphasage doit suivre alors, pour les faibles valeurs de α , un comportement en α^3 .

$$\Im(\mathcal{K}(k_0, k_0)) \sim \Im(\delta) \propto \alpha^3$$

En effet, ceci a été vérifié et est montré dans la figure (4.22). Un *fit* de la courbe d'évolution donne un comportement de l'ordre de α^3 avec une très bonne précision. Or ce résultat est valable à la seule condition que le noyau soit réel sur couche ou demi-couche d'énergie, condition qui a été vérifiée directement. Il est nécessaire de trouver d'autres résultats analytiques permettant de faire des vérifications. Un calcul perturbatif est une bonne voie pour cela.

4.7 Origine de la brisure d'unitarité de la matrice S à l'approximation *ladder*.

4.7.1 Calcul perturbatif de l'amplitude de diffusion inélastique.

Pour les faibles valeurs de α , il est possible d'effectuer un calcul approché du déphasage inélastique en calculant l'amplitude de diffusion correspondant au processus

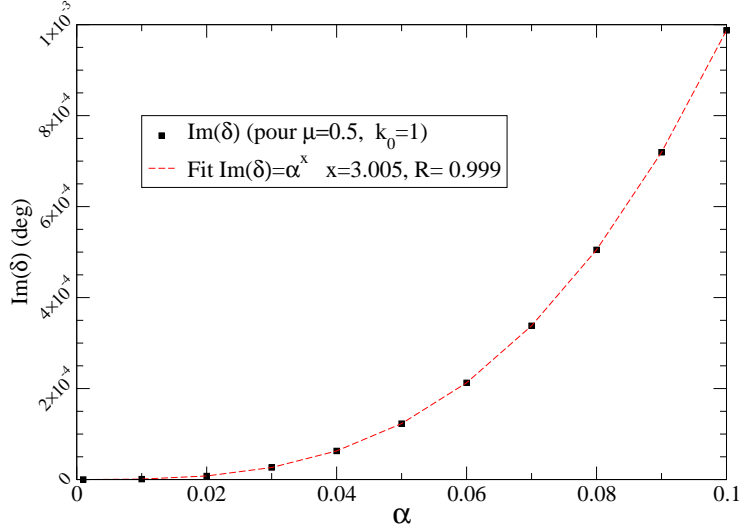


FIG. 4.22 – Évolution du déphasage imaginaire pour l'onde S en fonction de α pour $k_0 = 1$, avec $\mu = 0.5$ et un seuil de $k_0 = 0.75$. Il suit un comportement en α^3 pour les faibles valeurs de α

$1 + 2 \longrightarrow 1' + 2' + 3'$, au premier ordre d'un développement perturbatif en α . Pour cela, il faut s'appuyer sur le résultat suivant (voir l'annexe IV), donnant une relation entre le déphasage et la section efficace inélastique pour les petites valeurs du déphasage imaginaire δ'' :

$$\delta'' = \text{Im}(\delta) = \frac{k^2}{2\pi} \sigma^{inel} \quad (4.21)$$

avec :

$$\sigma^{inel} = \frac{1}{8k\varepsilon_k} \int |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_3}} \quad (4.22)$$

Il suffit de calculer les amplitudes de diffusion du processus au premier ordre. Les premiers diagrammes contribuant à ce processus sont d'ordre g^3 , donnant une contribution à la section efficace – et donc au déphasage inélastique – proportionnelle à $g^6 \propto \alpha^3$. Les diagrammes correspondant aux fluctuations du vide étant interdits dans la LFD, il suffit de calculer seulement six diagrammes. Trois de ces diagrammes sont montrés dans les figures (4.23), les trois autres peuvent s'obtenir par permutation des particules 1 et 2.

En utilisant les règles diagrammatiques de la LFD, les amplitudes correspondant à

4.7. ORIGINE DE LA BRISURE D'UNITARITÉ DE LA MATRICE S À L'APPROXIMATION *LADDER*.

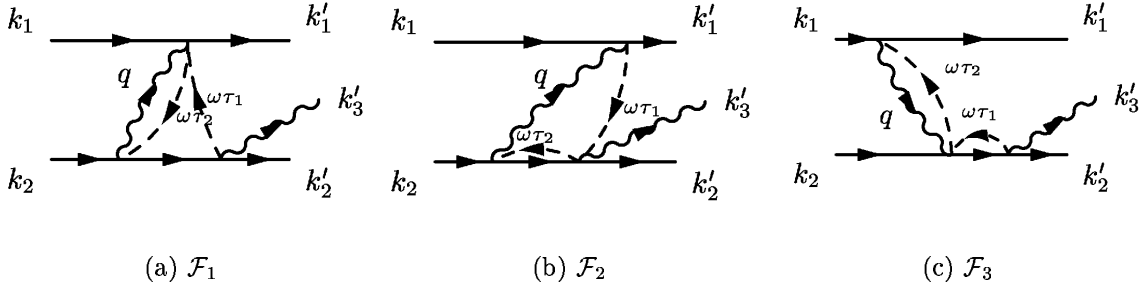
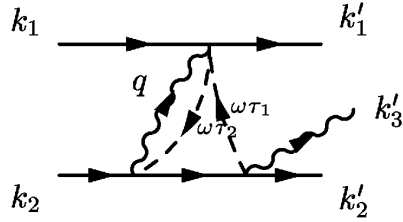
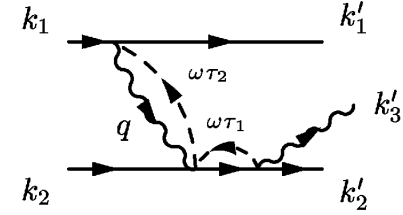


FIG. 4.23 – Diagrammes d'ordre g^3 contribuant à l'amplitude de diffusion du processus $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + 3'$. Il reste trois autres graphes, où le méson est émis par la ligne 1. Pour alléger le dessin, les spurions (lignes discontinues) externes n'ont pas été dessinés.

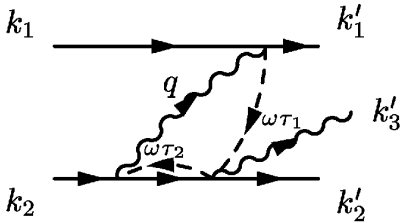
ces trois graphes s'expriment sous la forme intégrale suivante :



$$\mathcal{F}_1 = g^3 \int \theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1)) \delta((k'_1 - k_1 + \omega\tau_2 - \omega\tau_1)^2 - \mu^2) \times \theta(\omega \cdot (k'_2 + k'_3)) \delta((k'_2 + k'_3 + \omega\tau_1)^2 - m^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2}$$



$$\mathcal{F}_2 = g^3 \int \theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1)) \delta((k'_1 - k_1 + \omega\tau_1)^2 - \mu^2) \times \theta(\omega \cdot (k'_2 + k'_3)) \delta((k'_2 + k'_3 + \omega\tau_2 - \omega\tau_1)^2 - m^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2}$$



$$\mathcal{F}_3 = g^3 \int \theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1)) \delta((k_1 - k'_1 + \omega\tau_2)^2 - \mu^2) \times \theta(\omega \cdot (k'_2 + k'_3)) \delta((k'_2 + k'_3 + \omega\tau_1)^2 - m^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2}$$

Nous avons pris en considération uniquement les lignes internes. Les *spurions* externes n'ont pas été dessinés pour faciliter la lecture des graphes. Utilisons la relation connue suivante¹² :

$$\int_a^b f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{\left| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x=x_i}}$$

pour exprimer autrement ces intégrales. Pour \mathcal{F}_1 , l'intégration des fonctions δ fait apparaître deux expressions explicites pour τ_1 et τ_2 :

$$\tau_1 = \frac{m^2 - (k'_2 + k'_3)^2}{2\omega \cdot (k'_2 + k'_3)}, \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{\mu^2 - (k'_1 - k_1)^2}{2\omega \cdot (k'_1 - k_1)}.$$

12. Où $f(x_i) = 0$

L'amplitude \mathcal{F}_1 peut donc être représentée par l'expression suivante :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{g^3 \theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{\left[m^2 - (k'_2 + k'_3)^2 \right] \frac{\omega \cdot (k'_1 - k_1)}{\omega \cdot (k'_2 + k'_3)} + \mu^2 - (k'_1 - k_1)^2} \frac{1}{[m^2 - (k'_2 + k'_3)^2]} \quad (4.23)$$

En introduisant les fonctions :

$$\Pi_m = m^2 - (k'_2 + k'_3)^2, \quad \Pi_\mu = \mu^2 + (k'_1 - k_1)^2 \quad \text{et} \quad y = \frac{\omega \cdot (k'_1 - k_1)}{\omega \cdot (k'_2 + k'_3)}$$

cette expression est allégée sous la forme suivante :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{g^3 \Theta(y)}{y \Pi_m + \Pi_\mu} \frac{1}{\Pi_m} \quad (4.24)$$

De la même façon, nous trouvons des expressions analogues pour les autres amplitudes :

$$\mathcal{F}_2 = \frac{g^3 \Theta(y)}{\frac{1}{y} \Pi_\mu + \Pi_m} \frac{1}{\Pi_\mu} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{F}_3 = \frac{g^3 \Theta(-y)}{\Pi_\mu \Pi_m} \quad (4.26)$$

Les amplitudes correspondant aux processus où la particule échangée est émise par la ligne 1 s'obtiennent par permutation des particules 1 et 2. Les paramètres correspondants sont donnée par :

$$\Pi'_m = m^2 - (k'_1 + k'_3)^2, \quad \Pi'_\mu = \mu^2 - (k'_2 - k_2)^2 \quad \text{et} \quad y' = \frac{\omega \cdot (k'_2 - k_2)}{\omega \cdot (k'_1 + k'_3)}$$

et les amplitudes :

$$\mathcal{F}'_1 = \frac{g^3 \theta(y')}{y' \Pi'_m + \Pi'_\mu} \frac{1}{\Pi'_m} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{F}'_2 = \frac{g^3 \theta(y')}{\frac{1}{y'} \Pi'_\mu + \Pi'_m} \frac{1}{\Pi'_\mu} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{F}'_3 = \frac{g^3 \theta(-y')}{\Pi'_\mu \Pi'_m} \quad (4.29)$$

Remarquons, en particulier, que la somme $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$ est indépendante de ω , ainsi que l'amplitude totale $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2 + \mathcal{F}'_3$. Les observables physiques ne dépendent donc pas de la direction du front de lumière.

Restreignons-nous maintenant à l'approximation *ladder*. Les amplitudes \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}'_2 ne sont pas à prendre en compte car elles contiennent deux mésons dans l'état intermédiaire. Nous ne gardons que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_3$. Regardons l'amplitude au carré \mathcal{F}^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 &= \mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{F}'_1{}^2 + \mathcal{F}'_3{}^2 + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3 + 2\mathcal{F}'_1\mathcal{F}'_3 \\ &\quad + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}'_1 + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}'_3 + 2\mathcal{F}_3\mathcal{F}'_1 + 2\mathcal{F}_3\mathcal{F}'_3 \end{aligned}$$

4.7. ORIGINE DE LA BRISURE D'UNITARITÉ DE LA MATRICE S À L'APPROXIMATION *LADDER*.

Les six premiers termes correspondent à l'émission puis absorption d'un méson par une même particule scalaire. Il s'agit de la contribution due à la self-énergie et doit être exclue à l'approximation *ladder*.

$$\mathcal{F}_{self}^2 = \mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{F}_1'^2 + \mathcal{F}_3'^2 + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3 + 2\mathcal{F}_1'\mathcal{F}_3' = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3)^2 + (\mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3')^2 \quad (4.30)$$

Le terme contribuant à l'approximation *ladder* s'exprime donc par :

$$\mathcal{F}_{ladder}^2 = 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_1' + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3' + 2\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1' + 2\mathcal{F}_3\mathcal{F}_3' = 2(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3') \quad (4.31)$$

Une première remarque : le carré de l'amplitude $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_{ladder}^2 + \mathcal{F}_{self}^2$ est par construction positif et permet d'assurer $\delta'' > 0$, et partant, l'unitarité de la matrice S . L'approximation $\mathcal{F}^2 \approx \mathcal{F}_{ladder}^2 = 2(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3')$ ne permet plus d'assurer l'unitarité de la matrice S , comme nous allons voir par la suite.

Calcul explicite au seuil pour l'onde S .

Utilisons la même convention antérieure pour la décomposition en ondes partielles de l'amplitude $2 \rightarrow 2$:

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}(\vec{k}, \vec{k}_0) = 4\pi \sum_{\lambda\lambda_0\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\hat{k}) \mathcal{F}_{\lambda\lambda_0\mu}(k, k_0) Y_{\lambda_0\mu}(\hat{k}_0)$$

Pour obtenir l'amplitude pour une onde partielle donnée, il suffit d'écrire la décomposition de l'amplitude $2 \rightarrow 3$ pour le seul vecteur \vec{k}_0 :

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}(\vec{k}_0; \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \sqrt{4\pi} \sum_{\lambda_0\mu} \mathcal{F}_{\lambda_0\mu}(k_0; \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) Y_{\lambda_0\mu}(\hat{k}_0) \quad (4.32)$$

Réciproquement, nous avons :

$$\mathcal{F}_{\lambda_0\mu}(k_0; \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}(\vec{k}_0; \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) Y_{\lambda_0\mu}^*(\hat{k}_0) d\Omega_{\vec{k}_0} \quad (4.33)$$

Cette composante est directement reliée à la section efficace inélastique pour une onde partielle donnée, et donc au déphasage correspondant par la relation (4.21). Pour l'onde S , il suffit de fixer $\lambda_0 = 0$ et $\mu = 0$. Calculons cette intégrale. Le premier harmonique sphérique est donné par $Y_{00}^*(\hat{k}_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. De plus, il n'y a pas de dépendance en φ , donc l'intégration sur cet angle fait juste apparaître un facteur 2π . Il ne reste qu'une intégration sur $u = \cos \theta = \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{k}$:

$$\hat{\mathcal{F}}_S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{F} du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3) du \quad (4.34)$$

Dans cette expression, nous avons omis l'amplitude \mathcal{F}_2 car elle va au-delà de l'approximation *ladder*. Les expressions de \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_3 sont données par (4.24) et (4.26). Pour calculer une expression analytique de $\hat{\mathcal{F}}_S$, nous allons nous placer près du seuil de création. Au voisinage du seuil $k_0^2 = m\mu + \frac{\mu^2}{4}$, l'impulsion des particules doit être nulle : $\vec{k}_1' = \vec{k}_2' = \vec{k}_3' = 0$. Ceci nous permet d'obtenir des expressions analytiques des fonctions y , Π_m et Π_μ , ainsi

que des fonctions correspondantes obtenues par permutation des particules¹³. Nous retrouvons donc :

$$\begin{aligned} y &= \frac{\omega \cdot (k'_1 - k_1)}{\omega \cdot (k'_2 + k'_3)} = \frac{\omega_0(k'_{10} - k_{10}) - \omega_0 \hat{n} \cdot (\vec{k}'_1 - \vec{k})}{\omega_0(k'_{20} + k'_{30}) - \omega_0 \hat{n} \cdot (\vec{k}'_2 + \vec{k}'_3)} \\ &= \frac{m - \sqrt{k_0^2 + m^2} + k_0 \left(\frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{k} \right)}{m + \mu} \\ y &= \frac{k_0}{m + \mu} (u - u_0) \end{aligned} \quad (4.35)$$

avec $u_0 = \frac{\mu}{2k_0}$. De même :

$$y' = \frac{-k_0}{m + \mu} (u + u_0) \quad (4.36)$$

Pour finir :

$$\Pi_m = \Pi'_m = -\mu(2m + \mu) \quad ; \quad \Pi_\mu = \Pi'_\mu = \mu(m + \mu) \quad (4.37)$$

L'intégration sur u dans (4.34) est alors analytique et donnée par :

$$\hat{\mathcal{F}}_S = \frac{1}{2} \int_{-1}^{u_0} \mathcal{F}_3 du + \frac{1}{2} \int_{u_0}^1 \mathcal{F}_1 du = \frac{g^3}{2} \frac{(1 + u_0)}{\Pi_m \Pi_\mu} + \frac{g^3}{2} \frac{(m + \mu)}{k_0 \Pi_m^2} \log \left(1 + \frac{k_0 \Pi_m (1 - u_0)}{\Pi_\mu (m + \mu)} \right)$$

Le même calcul sur \mathcal{F}' permet de trouver $\hat{\mathcal{F}}'_S = \hat{\mathcal{F}}_S$. Le carré de l'amplitude $|\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2$ est alors donné par :

$$|\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 = 2 \hat{\mathcal{F}}_S \hat{\mathcal{F}}'_S = 2 \hat{\mathcal{F}}_S^2 \quad (4.38)$$

Au voisinage du seuil, l'amplitude $|\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|$ ne dépend pas des impulsions. Il est donc possible, en utilisant l'équation (4.22), d'exprimer analytiquement la section efficace inélastique au voisinage du seuil par la relation :

$$\sigma^{inel} = \frac{1}{8k\varepsilon_k} |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 V_3 = \frac{1}{4k\varepsilon_k} \hat{\mathcal{F}}_S^2 V_3 \quad (4.39)$$

avec V_3 le volume de l'espace de phases à trois corps¹⁴.

$$V_3 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_3}}$$

En utilisant (4.21), nous trouvons enfin une expression analytique du déphasage inélastique, pour l'onde S , au voisinage du seuil :

$$\delta'' = \frac{kV_3}{16\pi\varepsilon_k} \hat{\mathcal{F}}_S^2 \quad (4.40)$$

Comme $\hat{\mathcal{F}}_S^2$ ne dépend pas de k , nous nous attendons à un déphasage imaginaire proportionnel à $\frac{kV_3}{16\pi\varepsilon_k}$ au voisinage du seuil. De plus, ce comportement venant de la non dépendance en k_0 de $\hat{\mathcal{F}}_S^2$ au voisinage du seuil, ce résultat reste valable (à un facteur près) pour des valeurs de la constante de couplage α assez grands. Ceci a été retrouvé dans nos calculs numériques, montrés dans la figure (4.24).

13. Il suffit pour cela de changer tout vecteur \vec{k} et $-\vec{k}$. Rappelons ici que $\vec{k}_1 = \vec{k}$ est l'impulsion incidente de module $|\vec{k}| = k_0 = \sqrt{m\mu + \frac{\mu^2}{4}}$.

14. Voir équation (II.2) de l'annexe II

4.7. ORIGINE DE LA BRISURE D'UNITARITÉ DE LA MATRICE S À L'APPROXIMATION *LADDER*.

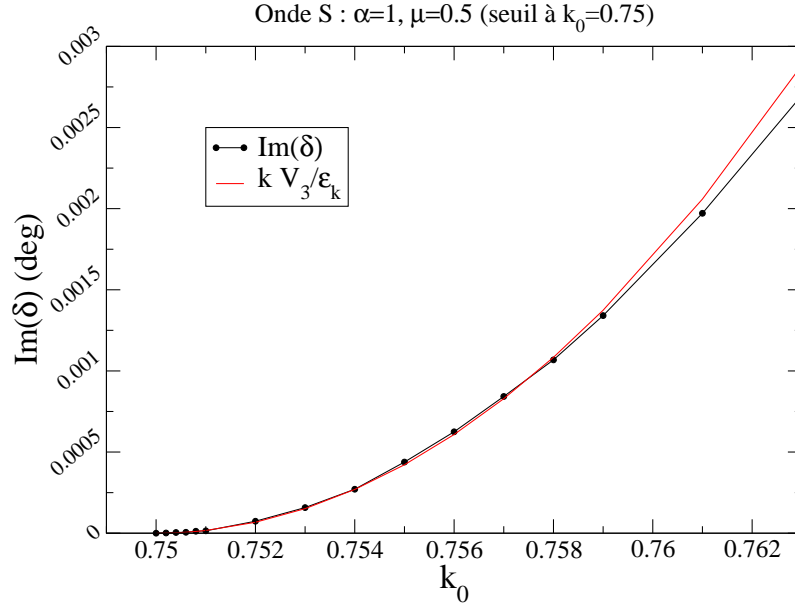


FIG. 4.24 – Évolution du déphasage imaginaire (onde S) au voisinage du seuil et comparaison avec $\frac{kV_3}{\varepsilon_k}$ (à un facteur multiplicatif près) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$.

Calcul explicite au seuil pour l'onde P

Dans le cas de l'onde P_0 , nous pouvons utiliser l'équation (4.33) et la relation entre les $P_{\lambda\mu}$ et les harmoniques sphériques, pour écrire :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_{P_0} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 u \mathcal{F} du = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{u_0} u \mathcal{F}_3 du + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{u_0}^1 u \mathcal{F}_1 du \\ &= \frac{g^3 \sqrt{3}}{2} \frac{(m + \mu)(1 - u_0^2)}{k_0 \Pi_m \Pi_\mu} \\ &\quad - \frac{g^3 \sqrt{3}}{2} \frac{(m + \mu)}{k_0^2 \Pi_m^3} [(m + \mu) \Pi_\mu - k_0 u_0 \Pi_m] \log \left(1 + \frac{\Pi_m k_0 (1 - u_0)}{\Pi_\mu (m + \mu)} \right) \quad (4.41)\end{aligned}$$

Nous trouvons aussi $\hat{\mathcal{F}}'_{P_0} = -\hat{\mathcal{F}}_{P_0}$, d'où une contribution négative au carré de l'amplitude pour l'onde P et à l'approximation *ladder* :

$$\delta'' \propto \mathcal{F}_{ladder, P_0}^2 = \hat{\mathcal{F}}_{P_0} \hat{\mathcal{F}}'_{P_0} = -\hat{\mathcal{F}}_{P_0}^2 < 0$$

Le déphasage inélastique au voisinage du seuil est donc négatif, ce qui viole l'unitarité de la matrice S . Ce résultat explique bien le comportement observé dans nos calculs numériques. La perte d'unitarité de la matrice S est donc inhérente à la restriction de l'interaction à l'approximation *ladder*. Cette perte d'unitarité est une conséquence directe de la non prise en compte de la self-énergie.

4.8 Rétablissement de l'unitarité de la matrice S . Prise en compte de la self-énergie.

La violation de l'unitarité de la matrice S rencontrée à l'approximation *ladder* est un problème grave. Aucune information physique pertinente ne peut être obtenue dans ce cadre. Ce problème de brisure de l'unitarité de la matrice S à l'approximation *ladder* a été observé pour les équations de Bethe-Salpeter par Levine, Wright et Tjon [35]. L'origine de ce problème s'explique par le fait que l'approximation *ladder* néglige des termes importants. En effet, nous avons vu dans le calcul perturbatif précédent que l'approximation *ladder* revient à approximer le carré d'un binôme $(A - B)^2$ par $-2AB < 0$.

L'ajout des termes négligés, correspondant à la prise en compte de la self-énergie, permet de résoudre le problème. Dans ce cas, considérer l'effet de la self-énergie, *i.e.* aller au-delà de l'approximation *ladder*, devient une nécessité. Regardons s'il est possible d'obtenir, par un calcul perturbatif, une expression au voisinage du seuil des déphasages inélastiques à l'approximation *ladder+self-énergie*.

4.8.1 Prise en compte de la self-énergie dans un calcul perturbatif au voisinage du seuil

Comme nous avons vu précédemment, la contribution de la self-énergie est donnée par l'expression :

$$\mathcal{F}_{self}^2 = \mathcal{F}_1^2 + \mathcal{F}_3^2 + \mathcal{F}_1'^2 + \mathcal{F}_3'^2 + 2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3 + 2\mathcal{F}_1'\mathcal{F}_3'$$

Sa prise en compte se fait par le calcul complet $\mathcal{F}^2 = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3')^2$. Nous avons vu pour l'onde S que les amplitudes $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3'$ donnent la même contribution au seuil de création :

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3) du = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\mathcal{F}_1' + \mathcal{F}_3') du = \mathcal{F}_S'$$

Nous avons donc une amplitude, avec prise en compte de la self-énergie, qui est donnée par :

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3} = 2\mathcal{F}_S \quad \text{et} \quad |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 = 4\mathcal{F}_S^2$$

au lieu de $|\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 = 2\hat{\mathcal{F}}_S^2$, trouvé pour l'approximation *ladder* dans l'équation (4.38). Au seuil de création, nous avons donc un déphasage deux fois plus important :

$$\delta_{S, \text{ ladder+self-énergie}}'' = 2\delta_{S, \text{ ladder}}'' \quad (4.42)$$

Pour l'onde P_0 , il y a deux termes donnant une même contribution en module mais de signe contraire. Ils s'annulent donc. Au seuil de création nous nous attendons donc à un déphasage nul :

$$\delta_{P_0, \text{ ladder+self-énergie}}'' = 0 \quad (4.43)$$

4.8.2 Prise en compte de la self-énergie : Modification du propagateur.

De la même façon que pour les états liés, la prise en compte de la self-énergie est traitée en remplaçant le propagateur libre par un propagateur «habillé». Nous utilisons ici les résultats obtenus dans le chapitre précédent. Nous changeons donc le propagateur libre :

$$G_0 = \frac{1}{4(k'^2 + m^2) - M^2 - i\epsilon} = \frac{1}{4(k'^2 - k_0^2 - i\epsilon)}$$

par le propagateur «habillé» :

$$G = \frac{1}{4(k'^2 + m^2) + \hat{\zeta} - M^2 - i\epsilon} = \frac{1}{4(k'^2 - k_0^2 + \frac{1}{4}\hat{\zeta} - i\epsilon)}$$

avec $\hat{\zeta} = \frac{1}{x'}\Sigma_R(p_1'^2) + \frac{1}{1-x'}\Sigma_R(p_2'^2)$. Regardons les impulsions servant d'arguments aux fonctions Σ_R :

$$p_1' = m^2 - x'(4\varepsilon_{k'}^2 - M^2) = m^2 - 4x'(k'^2 - k_0^2)$$

$$p_2' = m^2 - (1 - x')(4\varepsilon_{k'}^2 - M^2) = m^2 - 4(1 - x')(k'^2 - k_0^2)$$

Par construction, $\Sigma_R(m^2) = 0$, ce qui implique que $\hat{\zeta}(k_0) = 0$ et donc, que la position du pôle du propagateur n'est pas modifiée à cause de la self-énergie. L'équation pour la diffusion (4.3) s'exprime donc par :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + PP \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} d^3\vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \hat{G} \mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0) \quad (4.44)$$

Cette expression est néanmoins incorrecte car au pôle, le propagateur G a un résidu différent de celui de G_0 . Ceci ne jouait aucun rôle dans le cas des états liés, où le terme cinématique ne s'annule jamais, mais est très important pour les états de diffusion.

4.8.3 Équation renormalisée pour la diffusion.

Près du pôle, au voisinage $k'^2 \sim k_0^2$ nous avons : $p_1' = p_2' \sim m^2$. Exprimons la fonction $\hat{\zeta}$ dans ce voisinage. Le premier terme s'exprime par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x'}\Sigma_R(p_1'^2) &= \frac{1}{x'}(p_1'^2 - m^2) \left. \frac{d\Sigma_R(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \\ &= -4(k'^2 - k_0^2) \left. \frac{d\Sigma_R(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \end{aligned}$$

Nous trouvons la même expression pour $\frac{1}{1-x'}\Sigma_R(p_2'^2)$. La fonction de Green s'exprime donc, au voisinage $k'^2 \sim k_0^2$ sous la forme :

$$G \approx \frac{1}{4(k'^2 - k_0^2) \left(1 - \left. \frac{d\Sigma_R(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m^2} \right)}$$

d'où l'introduction de $Z_2^{-1} = (1 - \frac{d\Sigma_R(p^2)}{dp^2}\big|_{p^2=m^2})$ et d'une fonction de Green renormalisée, dont le résidu au pôle vaut 1.

$$G_R = Z_2^{-1}G$$

L'équation pour la diffusion s'exprime alors par :

$$\mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + PP \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} d^3\vec{k}' V(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) Z_2 G_R \mathcal{K}_{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0)$$

et en introduisant :

$$\mathcal{K} = Z_2^{-1} \mathcal{K}_R \quad \text{et} \quad V = Z_2^{-1} V_R$$

elle prend une forme plus familière :

$$\mathcal{K}_R^{\hat{n}}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_R(\vec{k}, \vec{k}_0, \hat{n}, M^2) + PP \int \frac{m}{\varepsilon_{k'}} d^3\vec{k}' V_R(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \hat{G}_R \mathcal{K}_R^{\hat{n}}(\vec{k}', \vec{k}_0) \quad (4.45)$$

Cette équation est en tout point équivalente à l'équation (4.44). Ici la self-énergie n'affecte en rien le résidu du pôle. Le noyau $V_R = Z_2 V$ garde la même forme que V , en introduisant une constante de couplage renormalisée

$$V_R = \frac{-4\pi\alpha_R}{Q^2 + \mu^2}$$

avec

$$\alpha_R = Z_2 \alpha$$

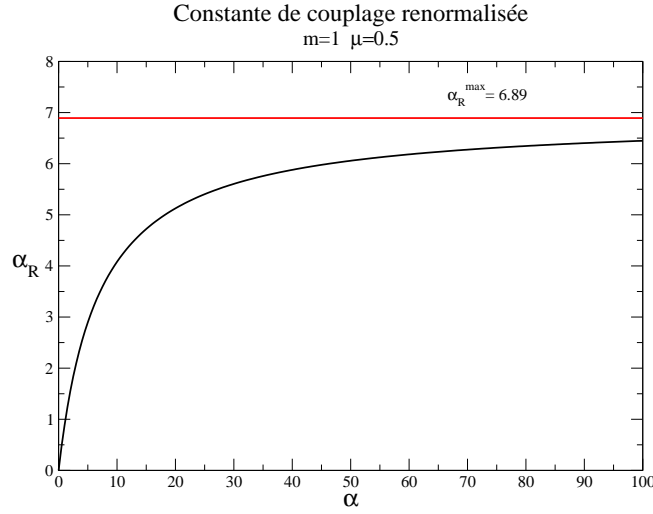
Notons que cette renormalisation de la constante de couplage est équivalente à la renormalisation montrée dans [33]. Remarquons que la constante de couplage renormalisée varie en fonction de α –voir fig. (4.25)– et possède une valeur maximale, ce qui se manifeste, dans le cas des états liés avec prise en compte de la self-énergie, par l'apparition d'une énergie de liaison maximale .

4.8.4 Décomposition angulaire.

La fonction $\hat{\zeta}$ a une dépendance angulaire, par conséquent, la décomposition angulaire du noyau doit se faire en prenant en compte le nouveau dénominateur. Une façon de traiter ce problème en gardant une forme très proche de la formulation précédente est d'introduire un noyau modifié de la forme :

$$V_R^{Self}(\vec{k}', \vec{k}_0) = \frac{V_R(\vec{k}', \vec{k}_0)}{k_0^2 - k'^2 - \frac{1}{4}\hat{\zeta}(\vec{k}', \vec{k}_0)} (k_0^2 - k'^2) \quad (4.46)$$

De cette façon, prendre en compte la self-énergie est équivalent à changer le noyau de l'interaction. Nous avons donc, pour le traitement numérique, une équation semblable à l'équation (4.3). La décomposition angulaire se fait de façon analogue. Comme précédemment, le calcul de $V_{\lambda\lambda'}$ passe par une triple intégration angulaire (sur φ , θ et θ'), dont deux peuvent être calculées analytiquement, l'autre numériquement. Comme $\hat{\zeta}$ ne dépend pas de φ ni de θ , nous ferons les intégrations analytiques sur ces variables, en ne changeant rien par rapport au cas précédent.


 FIG. 4.25 – Constante de couplage renormalisée α_R en fonction de α ($m=1$, $\mu = 0.5$).

Comparaison avec le calcul perturbatif

Comparons maintenant les résultats numériques avec le calcul perturbatif précédent. Ce calcul a permis de prouver que l'ajout de la self-énergie permet de rétablir l'unitarité de la matrice S au voisinage du seuil de création et pour des faibles constantes de couplage.

Regardons l'effet de la self-énergie sur les déphasages inélastiques pour l'onde P . La figure (4.26) montre que les déphasages imaginaires deviennent positifs, tant pour les ondes «non-physiques» δ_{P_0} et δ_{P_1} que pour l'onde «physique». Vérifions maintenant que nos calculs numériques coïncident avec les calculs perturbatifs au voisinage du seuil. Dans l'équation (4.42) nous avons :

$$\delta''_{S, \text{ladder+self-énergie}} = 2\delta''_{S, \text{ladder}}$$

Ceci a été vérifié numériquement, tel qu'il est montré dans la figure (4.27) pour une constante de couplage faible ($\alpha = 0.01$). Le déphasage imaginaire sans self-énergie est deux fois plus petit que sa valeur avec la self-énergie pour des valeurs très proches de k_0 (jusqu'à $k_0 \approx 0.756$ pour un seuil situé à $k_0 = 0.75$). Remarquons au passage que la relation n'est pas valable pour des valeurs de α plus importantes.

4.9 Résultats à l'approximation *ladder*+*Self-énergie*.

4.9.1 Résultats pour l'onde S .

Pour α grand et loin du seuil, un calcul perturbatif n'est pas évident à effectuer. Le calcul numérique nous permet d'accéder à ces régions. Comparons d'abord nos résultats avec les déphasages calculés par Ji, Kim et Min [39] en utilisant une approche non-explicitement covariante de la LFD. Dans cet article, les auteurs poursuivent l'étude

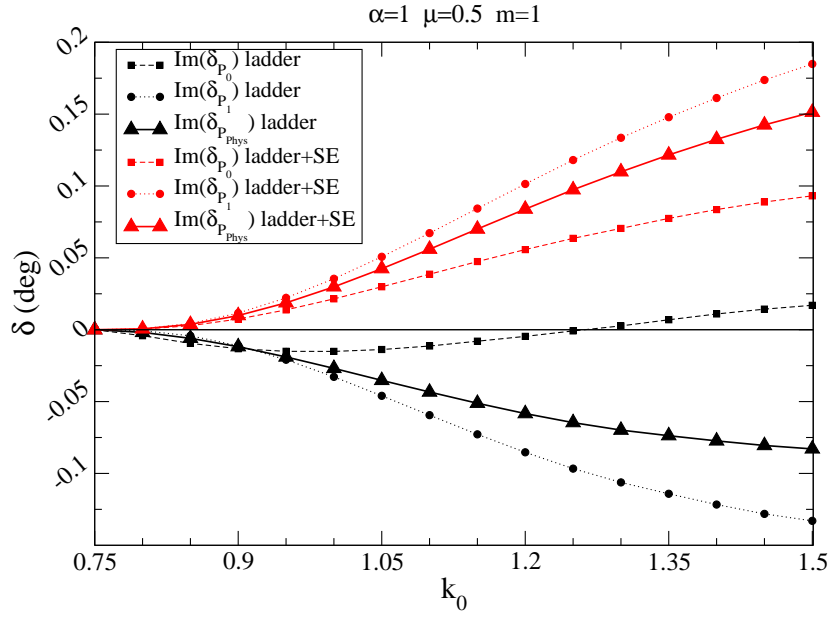


FIG. 4.26 – Effet de la self-énergie dans le déphasage imaginaire (onde P) au voisinage du seuil, pour $\mu = 0.5$ et $\alpha = 0.1$. En noir, déphasage pour l'approximation ladder. En rouge, le déphasage avec prise en compte de la self-énergie.

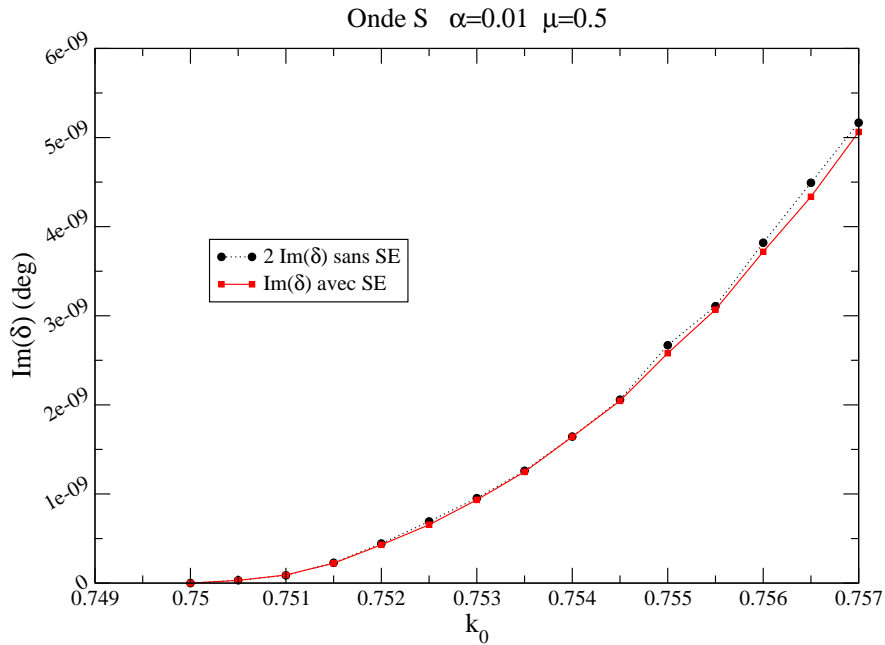


FIG. 4.27 – Vérification de la relation (4.42) au voisinage du seuil de création (ici $\mu = 0.5$ et $k_0^s = 0.75$).

de la dépendance des déphasages en fonction de la direction \hat{n} du front de lumière que l'un des auteurs (C.R. Ji), avait commencé dans un article précédent [38] et avec lequel nous avons comparé nos résultats à l'approximation *ladder*.

La figure (4.28) montre nos déphasages pour l'onde S, pour des constantes de couplage $\beta = \frac{\alpha}{\pi} = 0.1$ et 0.32. Notons que, dans le premier cas, nous coïcidons parfaitement avec les déphasages de Ji et al., quelle que soit la direction du front de lumière choisie. Dans le second cas, nous coïncidons avec les déphasages correspondant à la direction $\hat{n} \parallel \hat{x}$.

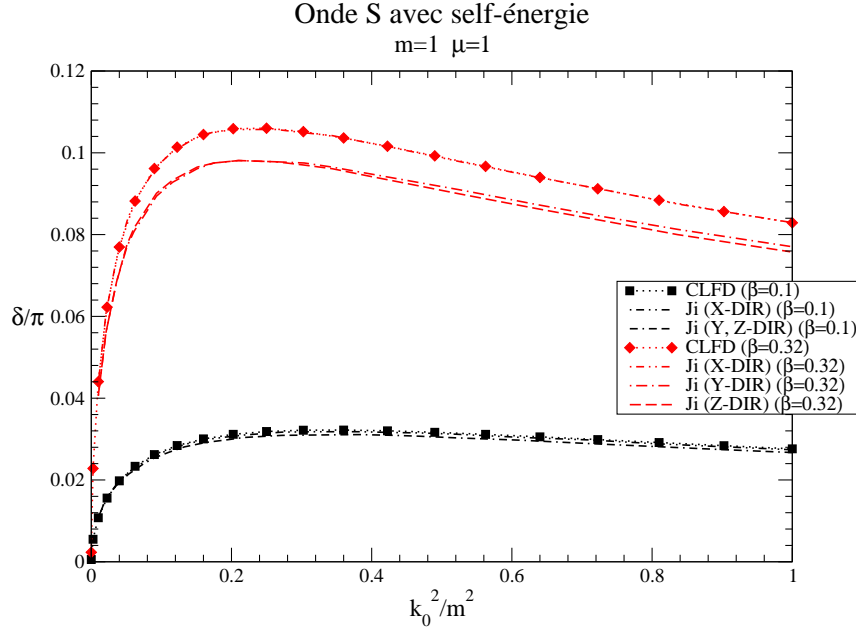


FIG. 4.28 – Onde S : Comparaison des déphasages avec self-énergie avec les résultats de Ji et al. [39] (figures 1 et 2), pour des constantes de couplage $\beta = 0.1$ (en noir) et 0.32 (en rouge), avec $\mu = m = 1$.

Regardons d'abord l'effet de la self-énergie sur les déphasages réels. Prenons par exemple un cas où il n'y a pas d'état lié ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$). La figure (4.29) montre les déphasages réels (δ') et imaginaires (δ'') avec et sans self-énergie. Comme attendu, l'effet répulsif de la self-énergie apparaît et nous avons $\delta'_{ladder} > \delta'_{SE}$. Or il existe deux régions bien distinctes. Pour des énergies importantes (à partir du seuil de création, par exemple), les déphasages réels sont très proches et l'effet de la self-énergie est faible. Nous observons par contre une très grande différence entre les déphasages réels à basse énergie, qui peuvent atteindre un facteur 2. Les déphasages imaginaires sont bien plus faibles et de même ordre de grandeur dans les deux cas.

Les différences entre les déphasages à basse énergie sont attendues. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent que la self-énergie a un effet répulsif important par rapport à l'approximation *ladder*. Il est intéressant de remarquer que l'écart entre les déphasages réels de l'onde S à très grande énergie diminue très rapidement. Ce comporte-

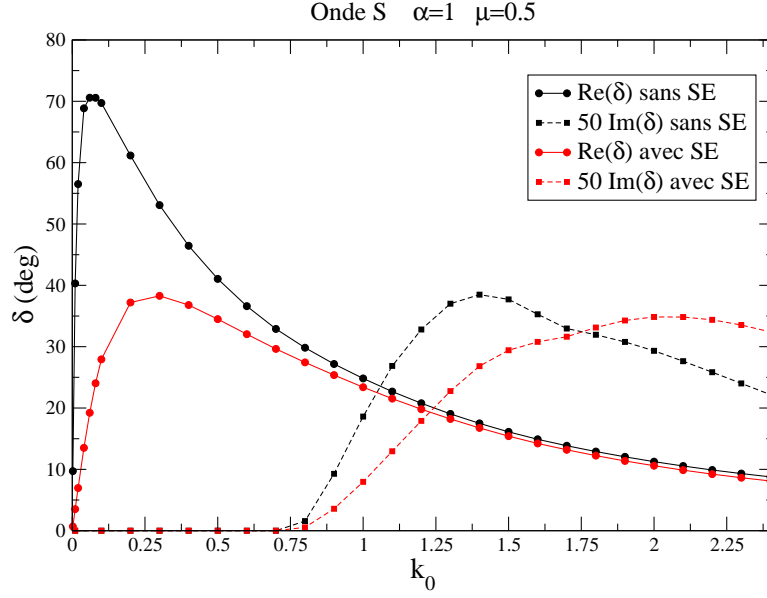


FIG. 4.29 – *Onde S* : Effet de la self-énergie sur les déphasages réels (en noir) et imaginaires (en rouge) (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 1$).

ment se retrouve aussi dans le cas où il existe un état lié à l'approximation *ladder* et avec une prise en compte de la self-énergie, comme il peut être observé dans la figure (4.30).

L'effet de la contribution de la self-énergie sur les déphasages réels semble diminuer pour les grandes valeurs de k_0 . Cette contribution joue néanmoins un tout premier rôle dans le secteur inélastique car elle permet d'assurer l'unitarité de la matrice S .

La figure (4.31) montre les déphasages inélastiques pour la même configuration ($\mu = 0.5$ et $\alpha = 2$) à l'approximation *ladder* et avec prise en compte de la self-énergie. Remarquons que le comportement au voisinage du seuil est proche. Le déphasage inélastique passe dans les deux cas par un maximum avant de décroître. Ils sont inférieurs aux déphasages réels d'un ordre de grandeur.

Comparons maintenant ces résultats avec ceux obtenus par Phillips et Afnan [36] à partir des équations $NN - \pi NN$ quadri-dimensionnelles. Dans la figure (4.32) nous avons rapporté les déphasages réels montrés dans leur article¹⁵. Notons qu'ils trouvent à l'approximation *ladder* une différence très faible entre les déphasages avec ou sans un propagateur «habillé» (one-loop dressing). Une seule courbe est donc représentée. Nos déphasages sans prise en compte de la self-énergie coïncident avec ceux de Phillips et Afnan, ce qui n'est pas le cas des déphasages avec prise en compte de la self-énergie. Ceci s'explique par le fait que qu'ils ne prennent pas en compte la totalité de la contribution de la self-énergie à une boucle, car ils se contentent d'un habillage minimal des propagateurs, permettant d'assurer l'unitarité de la matrice S .

La prise en compte totale de la self-énergie rapproche par contre les déphasages ima-

15. Dans la figure 7. Ils utilisent dans cet article la constante de couplage $\lambda = \frac{g^2}{16\pi^2}$.

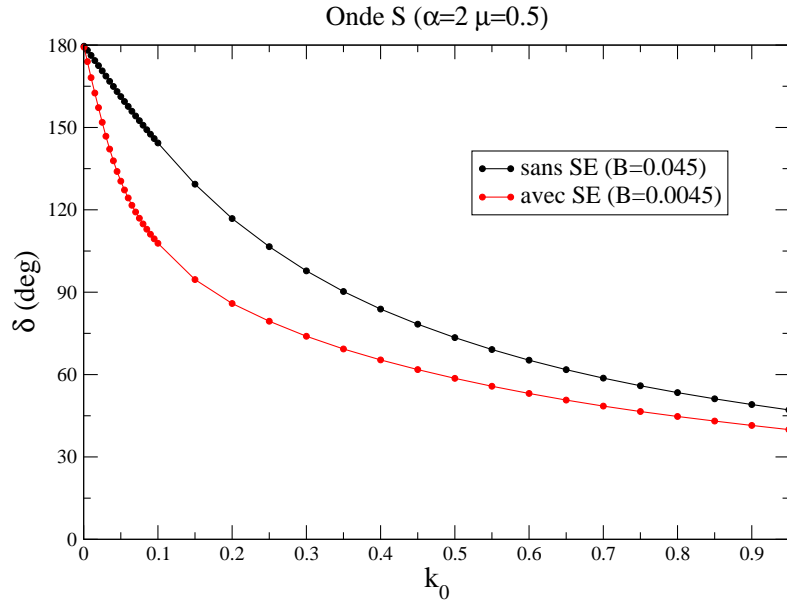


FIG. 4.30 – *Onde S* : Effet de la self-énergie sur les déphasages réels dans le cas où un état lié existe (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 2$).

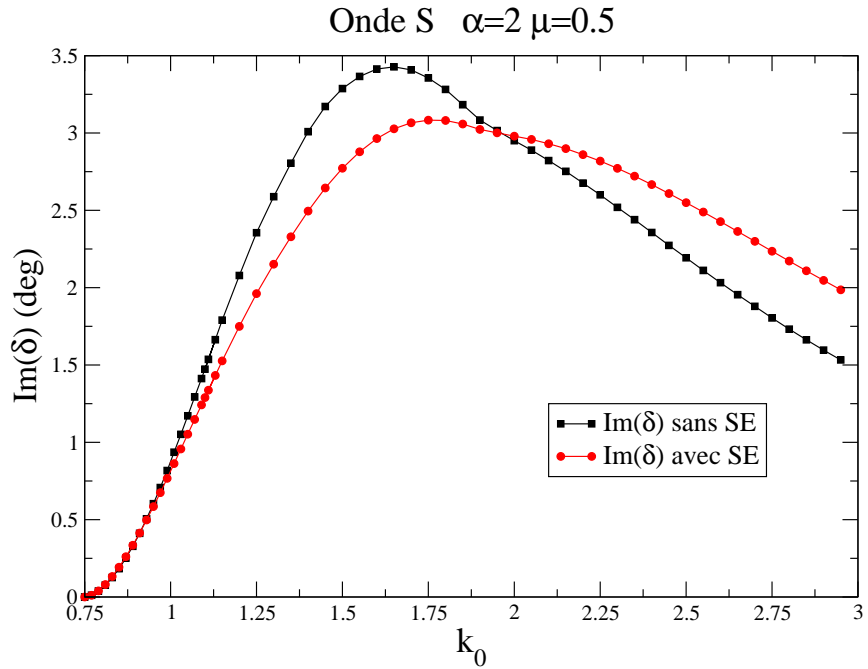


FIG. 4.31 – *Onde S* : Effet de la self-énergie sur les déphasages imaginaires dans le cas où un état lié existe (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 2$).

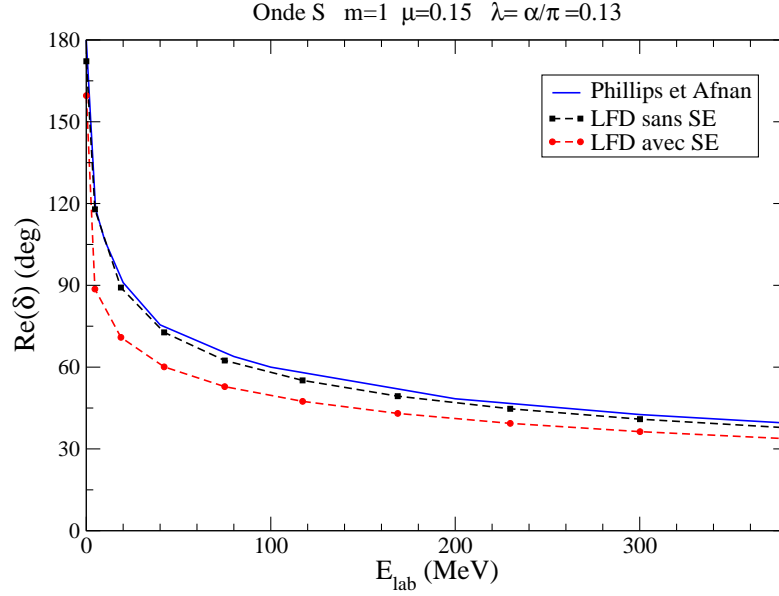


FIG. 4.32 – Onde S : Comparaison des déphasages réels calculés par Phillips et Afnan (en bleu) avec ceux obtenus dans le cadre de la LFD, avec ou sans prise en compte de la self-énergie (en rouge et noir respectivement).

ginaires. La figure (4.33) montre en effet les déphasages imaginaires calculés par Phillips et Afnan avec ou sans un habillage minimal du propagateur, ainsi que nos résultats avec ou sans self-énergie ¹⁶.

16. Dans la figure 8 de leur article, les déphasages sont donnés en degrés. Il s'agit d'une erreur d'édition, ces déphasages étant en réalité en radians, comme nous l'a confirmé le prof. Phillips.

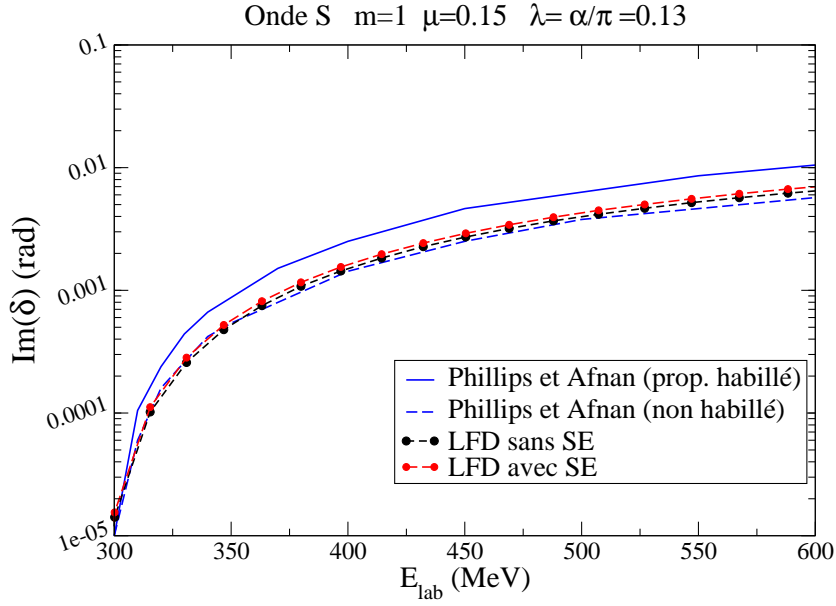


FIG. 4.33 – Onde *S* : Comparaison des déphasages inélastiques calculés par Phillips et Afnan (en bleu) avec ceux obtenus dans le cadre de la LFD, avec ou sans prise en compte de la self-énergie (en rouge et noir respectivement).

Ces résultats sont représentés sur une échelle plus lisible dans la figure (4.34). Nos résultats sans self-énergie coïncident, avec une bonne précision, avec leur résultat «non-habillé». Nos déphasages avec prise en compte de la self-énergie sont cependant proches de nos résultats à l'approximation *ladder* pour ce système, et s'éloignent fortement des résultats avec un propagateur «habillé» de Phillips et Afnan. La raison de cette différence vient du fait que nous ne calculons pas la même chose. En effet, leur propagateur «habillé» est calculé à partir de la contribution d'une seule boucle, ce qui correspond au diagramme représenté dans la figure (3.17). Par contre, notre calcul avec prise en compte de la self-énergie est effectué en «habillant» le propagateur par l'itération d'une infinité de tels processus à une boucle, comme il est indiqué dans l'équation (3.66).

4.9.2 Résultats pour l'onde *P*.

En ce qui concerne l'onde *P*, la figure (4.35) montre les déphasages dans un cas où il n'y a pas d'état lié. Les déphasages réels non-physiques encadrent de près les déphasages «physiques». L'effet répulsif de la self-énergie éloigne les déphasages jusqu'à un maximum de l'ordre de 12% un peu avant le seuil. Ces déphasages décroissent en se rapprochant ensuite.

Le changement le plus important entre les déphasages imaginaires à l'approximation *ladder* et avec prise en compte de la self-énergie est bien entendu le rétablissement de l'unitarité de la matrice *S*. Tous les déphasages inélastiques sont maintenant positifs et il est possible d'obtenir les déphasages inélastiques «physiques», qui eux aussi vont

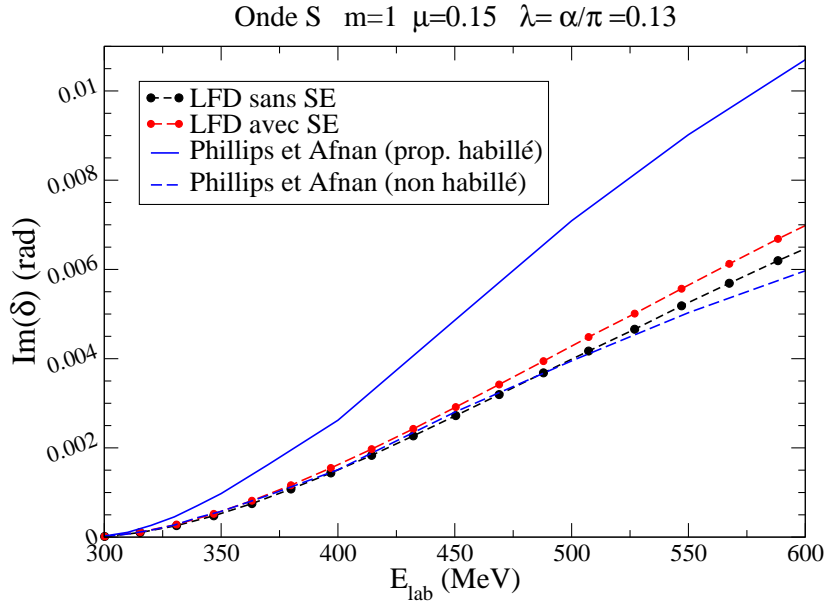


FIG. 4.34 – Onde S : Mêmes courbes que précédemment, en échelle linéaire.

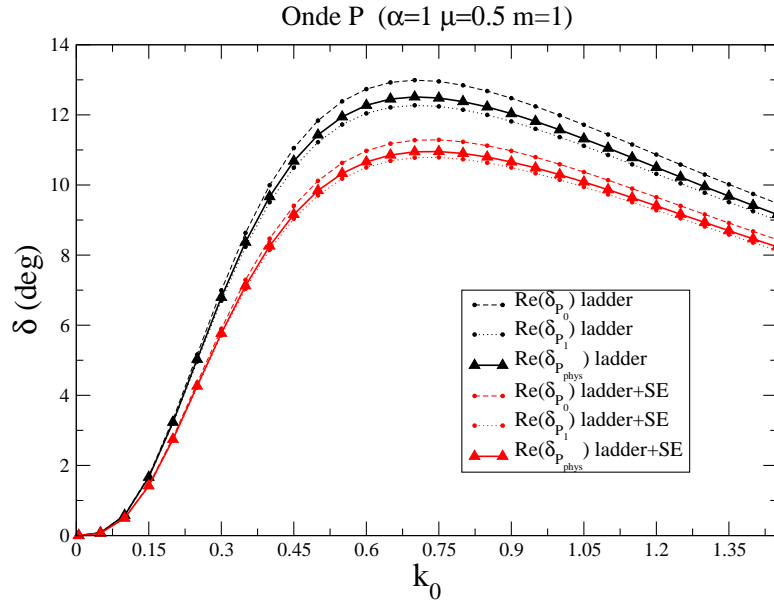


FIG. 4.35 – Onde P : Comparaison entre les déphasages réels à l'approximation ladder (en noir) et avec prise en compte de la self-énergie (en rouge), pour les ondes P_0 et P_1 , ainsi que le déphasage «physique» ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).

préserver l'unitarité. La figure (4.36) montre en effet le déphasage physique (en rouge), et les déphasages correspondant aux ondes P_0 et P_1 pour un système de masse échangée $\mu = 0.5$ et $\alpha = 1$. Le seuil est fixé à $k_0 = 0.75$. L'écart relatif entre les déphasages imaginaire non-physiques est plus grand que entre les déphasages réels. Remarquons que les déphasages inélastiques pour l'onde P sont faibles en comparaison à ceux correspondant à l'onde S , ces derniers étant plus de six fois plus grands pour des énergies importantes ($k_0 = 1.4$). En encadré, nous montrons le déphasage imaginaire correspondant à l'onde S .

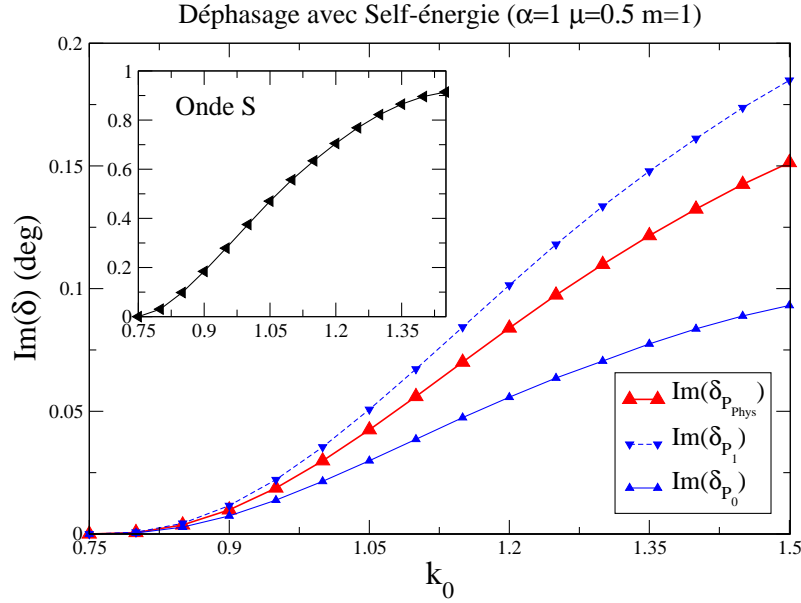


FIG. 4.36 – *Onde P* : Déphasages imaginaires avec prise en compte de la self-énergie pour les ondes P_0 et P_1 (en bleu) ainsi que le déphasage «physique» (en rouge) ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). En encadré, le déphasage imaginaire correspondant à l'onde S pour ces mêmes paramètres.

Pour finir, comparons nos résultats pour l'onde P avec prise en compte de la self-énergie avec les résultats de Ji, Kim et Min [39] pour $\beta = \frac{\alpha}{\pi} = 1$. La figure (4.37) montre les déphasages pour l'onde P avec ou sans self-énergie obtenus par ces derniers, pour différentes directions du front de lumière, ainsi que nos déphasages «physiques» et «non-physiques». Bien que notre déphasage «physique» sans self-énergie soit compris entre les différents déphasages de Ji et al., ce n'est plus le cas des déphasages avec self-énergie. Nos déphasages sont, dans ce cas, plus grands que les différents déphasages de Ji et al.

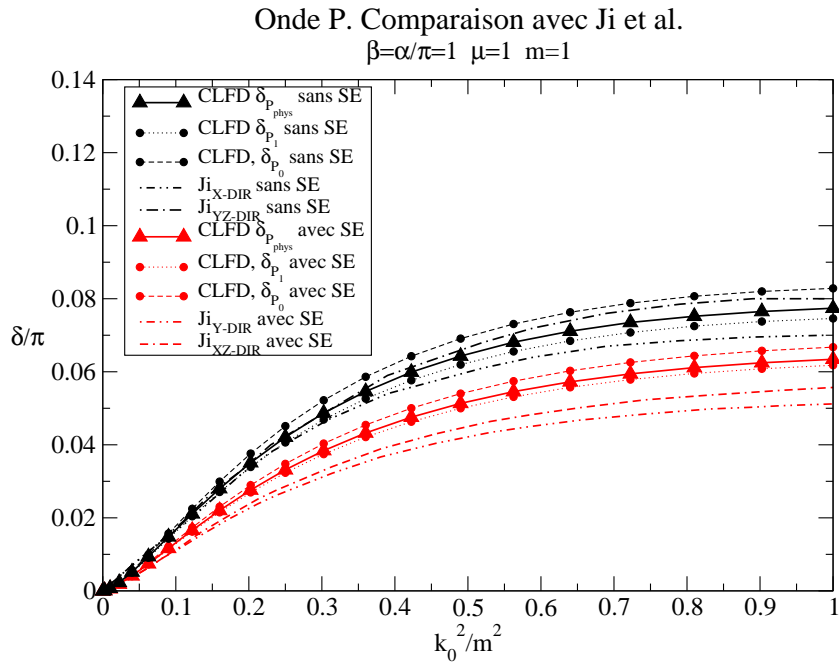


FIG. 4.37 – Onde P : Comparaison avec les résultats de Ji et al. avec (en rouge) ou sans self-énergie (en noir).

4.10 Dernières remarques.

Dans ce chapitre, nous avons étudié les états de diffusion relativiste de deux particules sans spin dans un modèle de Wick-Cutkosky étendu. Nous avons obtenu une équation de Lippmann-Schwinger relativiste équivalente à l'équation non-relativiste obtenue dans le deuxième chapitre. Nous avons choisi de formuler cette équation en fonction de la matrice \mathcal{K} .

En nous appuyant sur les résultats obtenus pour les états liés, nous avons effectué une décomposition angulaire de cette matrice, afin d'en extraire les déphasages pour une onde partielle donnée de façon équivalente au cas non-relativiste. Pour faciliter la résolution numérique de cette équation, nous nous sommes appuyés sur les résultats obtenus dans le chapitre précédent sur les propriétés du potentiel de Wick-Cutkosky à l'approximation *ladder*, en particulier sur le fait qu'il est possible d'obtenir des résultats à une très bonne approximation en tronquant le développement angulaire à son premier terme.

Nous avons pu constater plusieurs faits essentiels. Tout d'abord, le fait que notre potentiel relativiste, obtenu dans le cadre de la LFD, prend naturellement compte de l'ouverture d'un canal inélastique correspondant à l'émission de la particule d'échange, dès que l'énergie cinétique du système atteint la masse de cette particule. Le potentiel calculé à l'approximation *ladder* devient en effet automatiquement complexe dès que $T > \mu$, et ce, sans modifier aucunement le potentiel obtenu pour les états liés. Des déphasages imaginaires correspondant à ce processus ont été extraits. Il est apparu cependant que ce secteur inélastique n'était pas traité correctement, car l'unitarité de la matrice S est violée lorsque l'interaction est limitée à la seule approximation *ladder*.

Cette violation de l'unitarité est une conséquence immédiate de la non prise en compte de la self-énergie dans le calcul du noyau de l'interaction. Nous avons prouvé analytiquement, par un calcul perturbatif, que la prise en compte de la self-énergie permet de rétablir l'unitarité de la matrice S . Nous avons donc introduit ces processus dans notre calcul, ce qui nous a conduit à écrire une nouvelle équation pour la diffusion.

Nous avons donc pu calculer des déphasages inélastiques respectant l'unitarité de la matrice de diffusion, tant pour l'onde S que pour l'onde P . Pour cette dernière, les déphasages «physiques» ont été obtenus à partir des déphasages non-physiques, correspondant aux états propres de l'opérateur \hat{A}^2 .

Chapitre 5

Cas des fermions dans la LFD. Calcul des états liés et des états de diffusion.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les états liés et les états de diffusion de deux fermions de masse m qui interagissent par l'échange d'un boson de masse μ –qui est une particule soit scalaire, soit pseudo-scalaire, soit vectorielle– avec différents couplages.

Nous allons suivre la démarche présentée pour les particules sans spin. Ce n'est pas la démarche la plus évidente. En effet, il est possible d'effectuer une décomposition sur une base d'harmoniques sphériques tensoriels, définis comme le produit tensoriel entre les harmoniques sphériques habituels (scalaires) –vecteurs propres des opérateurs de moment cinétique \hat{L}^2 et \hat{L}_z – et les fonctions de spin χ_{S_σ} –vecteurs propres des opérateurs \hat{S}^2 et \hat{S}_z . Cette décomposition est cependant plus difficile que dans le cas scalaire. Nous préférons donc partir des équations dérivées pour un système de J^π donné, pour ensuite effectuer une décomposition angulaire plus transparente. Nous utiliserons une décomposition angulaire des fonctions d'onde semblable à celle appliquée au cas scalaire.

Tout d'abord, nous présenterons le calcul des états liés. Nous nous appuierons sur des résultats obtenus précédemment par Carbonell, Mangin-Brinet et Karmanov [41, 42, 13] pour dériver les équations régissant les états liés pour une parité et un moment angulaire total J^π donnés. Nous chercherons à retrouver les résultats obtenus par ces derniers pour l'état 0^+ et pour les couplages scalaires et pseudo-scalaires, en utilisant une décomposition angulaire, selon la démarche suivie dans l'étude des systèmes à deux particules scalaires. Nous allons montrer que la restriction au premier terme de cette décomposition angulaire est encore possible dans le cas du couplage scalaire, où un potentiel effectif obtenu par la moyenne sur la direction du front de lumière permet d'obtenir les états liés avec une bonne précision. Cette propriété ne se retrouve par contre pas pour le couplage pseudo-scalaire.

L'obtention des états liés va nous permettre d'aborder les états de diffusion. Une équation régissant les états de diffusion est obtenue. Pour l'état 0^+ , la structure de spin de la fonction d'onde implique que deux déphasages sont nécessaires pour décrire la diffusion. Ces déphasages sont obtenus par diagonalisation de la matrice 2×2 solution de l'équation pour les états liés.

Pour le couplage scalaire, ces deux déphasages ont des comportements différents : l'un d'eux est très faible à basse énergie et n'obéit pas au théorème de Levinson, l'autre, au contraire, possède un comportement habituel et est important à basse énergie. Ces deux déphasages sont cependant d'un même ordre de grandeur à plus grande énergie.

Comme dans le cas des particules scalaires, les potentiels calculés à l'aide de la LFD prennent automatiquement en compte l'ouverture d'un canal inélastique dès que l'énergie cinétique du système dépasse le seuil de création du boson. Des déphasages inélastiques sont calculés.

5.1 Fonction d'onde à deux corps. Noyau d'interaction.

De façon analogue au cas scalaire, une équation déterminant les états liés est obtenue par la projection de l'équation de masse (1.9) sur le secteur à deux corps de l'espace de Fock.

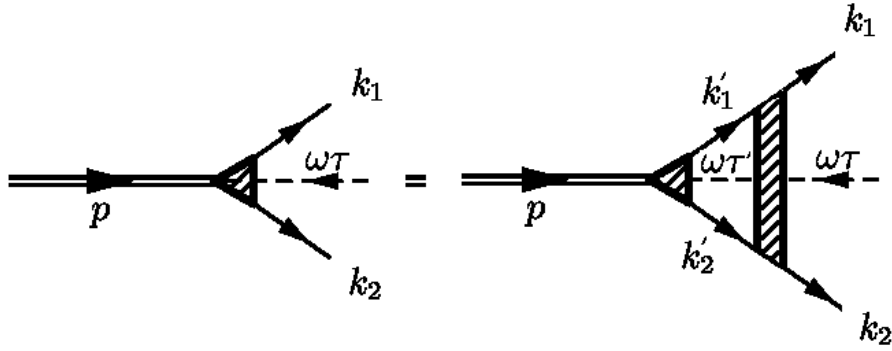


FIG. 5.1 – Représentation graphique de l'équation déterminant la fonction d'onde à deux particules.

Cette équation est représentée graphiquement par la figure (5.1) et se traduit à partir des règles diagrammatiques –dans le référentiel $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$ et avec les variables \vec{k} , \vec{k}' et \hat{n} définies dans le chapitre 3–, par l'équation :

$$\left[4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2\right] \Phi_{\sigma_2\sigma_1}(\vec{k}, \hat{n}) = -\frac{m^2}{2\pi^3} \int \sum_{\sigma'_2\sigma'_1} V_{\sigma'_2\sigma'_1}^{\sigma_2\sigma_1}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) \Phi_{\sigma_2\sigma_1}(\vec{k}', \hat{n}) \frac{d^2\vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \quad (5.1)$$

où $V_{\sigma'_2\sigma'_1}^{\sigma_2\sigma_1}$ est le noyau d'interaction et $\Phi_{\sigma_2\sigma_1}$ est la fonction d'onde à deux particules représentée dans la figure (5.3)

À la différence du cas scalaire, la fonction d'onde $\Phi_{\sigma_2\sigma_1}$ a une structure de spin dépendant de la valeur de J . Le noyau est obtenu à l'approximation *ladder*. Il est obtenu à partir des amplitudes correspondant aux deux diagrammes montrés dans la figure (5.2). Ces diagrammes sont équivalents à ceux permettant d'obtenir l'approximation *ladder* dans le cas scalaire, mais à la différence du modèle de Wick-Cutkosky, il y a différents types de couplages possibles, dépendants aussi du type de la particule échangée.

En effet, lorsque le boson échangé est une particule scalaire, le seul couplage possible est un couplage scalaire dont la densité lagrangienne d'interaction est donnée par :

$$\mathcal{L}_s^{int} = g \bar{\Psi} \Psi \Phi^s$$

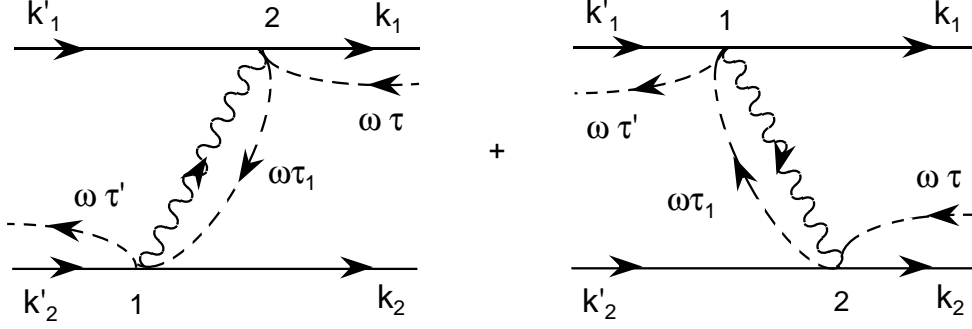


FIG. 5.2 – Noyau de l'interaction dans la ladder approximation.

Lorsque la particule échangée est pseudo-scalaire, deux couplages sont possibles, le couplage pseudo-scalaire ou le couplage pseudo-vectorel. Les lagrangiens d'interaction sont respectivement :

$$\mathcal{L}_{ps}^{int} = ig \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi \Phi^{ps}$$

et :

$$\mathcal{L}_{pv}^{int} = -\frac{g}{2m} \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \partial_\mu \Phi^{ps}$$

Enfin, lorsque la particule échangée est une particule vectorielle, nous avons le couplage vectoriel :

$$\mathcal{L}_v^{int} = \bar{\Psi} \left[g \gamma^\mu \Phi_\mu^v + \frac{f}{4m} \sigma^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi_\nu^v - \partial_\nu \Phi_\mu^v) \right] \Psi$$

avec le tenseur $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$. En ce qui suit nous nous limitons aux deux premiers cas. Les amplitudes représentées par (5.2) se traduisent, à l'aide des règles diagrammatiques par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) &= \int \Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1)) \delta((k_1 - k'_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau)^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\varepsilon} \\ &\quad \times [\bar{u}(k_1) O_1 u(k'_1)] [\bar{u}(k_2) O_2 u(k'_2)] \\ &\quad + \int \Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1)) \delta((k'_1 - k_1 + \omega\tau_1 - \omega\tau')^2 - \mu^2) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\varepsilon} \\ &\quad \times [\bar{u}(k_1) O_1 u(k'_1)] [\bar{u}(k_2) O_2 u(k'_2)] \\ \mathcal{K}(k'_1, k'_2, \omega\tau'; k_1, k_2, \omega\tau) &= \left[\frac{\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1))}{\mu^2 - (k_1 - k'_1)^2 + 2\tau\omega \cdot (k_1 - k'_1) - i\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{\mu^2 - (k'_1 - k_1)^2 + 2\tau'\omega \cdot (k'_1 - k_1) - i\varepsilon} \right] \times \\ &\quad \times [\bar{u}(k_1) O_1 u(k'_1)] [\bar{u}(k_2) O_2 u(k'_2)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

La notation $u(k_1)$ correspond au spineur de Dirac $u_1^{\sigma_1}(k_1)$, la notation $u(k'_1)$ correspondant à $u_1^{\sigma'_1}(k'_1)$. Ces spineurs sont normalisés par $\bar{u}_\sigma u_{\sigma'} = 2m\delta_{\sigma\sigma'}$ et sont définis par :

$$u_\sigma(k) = \sqrt{\varepsilon_k + m} \left(\frac{1}{\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m}} \right) w_\sigma \quad \text{et} \quad \bar{u}_\sigma(k) = \sqrt{\varepsilon_k + m} w_\sigma^\dagger \left(1, \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k + m} \right)$$

où w_σ est le spineur à deux dimensions. Notons tout de suite une relation utile par la suite :

$$\sum_\sigma u^\sigma(k) \bar{u}^\sigma(k) = \not{k} + m$$

où nous avons noté \not{k} la contraction $\not{k} = k_\mu \gamma^\mu$.

Le type de couplage est représenté par O_1 et O_2 . Ils seront :

i. Couplage scalaire :

$$O_1 = O_2 = g$$

ii. Couplage pseudo-scalaire :

$$O_1 = O_2 = ig\gamma_5$$

Le potentiel V sera relié à l'amplitude \mathcal{K} par la relation $V = \frac{-\mathcal{K}}{4m^2}$.

$$V = -\frac{1}{4m^2} \left[\frac{\Theta(\omega \cdot (k_1 - k'_1))}{\mu^2 - (k_1 - k'_1)^2 + 2\tau\omega \cdot (k_1 - k'_1) - i\varepsilon} + \frac{\Theta(\omega \cdot (k'_1 - k_1))}{\mu^2 - (k'_1 - k_1)^2 + 2\tau'\omega \cdot (k'_1 - k_1) - i\varepsilon} \right] [\bar{u}(k_1)O_1u(k'_1)] [\bar{u}(k_2)O_2u(k'_2)]$$

Remarquons qu'à l'exception du facteur $[\bar{u}(k_1)O_1u(k'_1)] [\bar{u}(k_2)O_2u(k'_2)]$, nous retrouvons la même expression obtenue dans le calcul du noyau du cas scalaire donnée par (3.19). Nous pouvons donc utiliser les expressions obtenues pour le cas scalaire afin d'exprimer le noyau en fonction des variables \vec{k} , \vec{k}' et \hat{n} . Le noyau s'écrit donc sous la forme suivante :

$$V_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{Q^2 + \mu^2} [\bar{u}(k_1)O_1u(k'_1)] [\bar{u}(k_2)O_2u(k'_2)] \quad (5.3)$$

avec Q^2 ayant la même expression donnée dans (3.27) pour le cas scalaire :

$$Q^2 = (\vec{k} - \vec{k}')^2 + (\varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k'}^2 - \frac{1}{2}M^2) \left| \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{\hat{n} \cdot \vec{k}}{\varepsilon_k} \right| - \frac{(\varepsilon_{k'} - \varepsilon_k)^2}{\varepsilon_k \varepsilon_{k'}} (\hat{n} \cdot \vec{k})(\hat{n} \cdot \vec{k}') \quad (5.4)$$

Le dénominateur $Q^2 + \mu^2$ peut aussi s'exprimer sous la forme suivante :

$$Q^2 + \mu^2 = A + B \cos \varphi'$$

Pour simplifier les expression, nous noterons :

$$D(Q) = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{Q^2 + \mu^2}$$

le noyau s'exprimant alors par l'expression :

$$V_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma'_1\sigma'_2}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2) = D(Q) [\bar{u}(k_1)O_1u(k'_1)] [\bar{u}(k_2)O_2u(k'_2)] \quad (5.5)$$

Notons que le dénominateur du potentiel a la même forme que le potentiel de Wick-Cutkosky. Des propriétés observées dans le cas des particules scalaires vont se retrouver pour les fermions, et ce, quel que soit le couplage. En particulier, l'existence d'un pôle du dénominateur, dès que l'énergie cinétique du système dépasse la masse de la particule échangée, qui ouvre *automatiquement* un canal inélastique pour les états de diffusion.

5.2 États liés pour un système de moment angulaire total $J^\pi = 0^+$.

Considérons en détail un état de parité positive et de moment angulaire total nul. Nous notons cet état $J^\pi = 0^+$, correspondant à l'état 1S_0 . Dérivons d'abord l'équation correspondant aux états liés de l'état $J = 0^+$ à partir de l'équation générale (5.1). Exprimons tout d'abord la fonction d'onde $\Phi_{\sigma_2\sigma_1}$ représentée dans la figure (5.3).

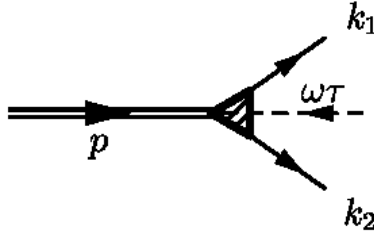


FIG. 5.3 – Représentation diagrammatique de la fonction d'onde à deux corps dans la LFD.

La fonction d'onde est donnée par une superposition de différentes structures de spin. Dans le cas $J = 0^+$, ces structures de spin sont au nombre de deux. La fonction d'onde s'écrit sous la forme suivante [43, 12] :

$$\Phi_{\sigma_2\sigma_1}(k_1, k_2, p, \omega\tau) = \sqrt{m}\bar{u}_{\sigma_2}(k_2)\phi U_c\bar{u}_{\sigma_1}(k_1) \quad (5.6)$$

où $U_c = \gamma^2\gamma^0$ est la matrice de conjugaison de charge. ϕ s'exprime par :

$$\phi = f_1 S_1 + f_2 S_2 \quad (5.7)$$

où les S_i représentent deux structures de spin indépendantes données par :

$$\begin{cases} S_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2}\varepsilon_k}\gamma_5 \\ S_2 &= \frac{\varepsilon_k}{2\sqrt{2}mk\sin\theta}\left(\frac{2m}{\omega\cdot p}\not{\psi} - \frac{m^2}{\varepsilon_k^2}\right)\gamma_5 \end{cases} \quad (5.8)$$

avec $\not{\psi} = \omega_\mu\gamma^\mu$ et $z = \cos\theta = \hat{k} \cdot \hat{n}$. Les fonctions f_i ne dépendent que des scalaires k et z . À chaque S_i est associé $\bar{S}_i = \gamma_0 S_i^\dagger \gamma_0$. Ces structures de spin sont orthogonales et normalisées par la relation :

$$Tr\{\bar{S}_i(\not{k}_2 + m)S_j(\not{k}_1 - m)\} = \delta_{ij} \quad (5.9)$$

Dans le référentiel $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$, la fonction d'onde a pour expression :

$$\Phi_{\sigma_2\sigma_1} = \sqrt{m}w_{\sigma_2}^\dagger \psi(\vec{k}, \hat{n})w_{\sigma_1}^\dagger \quad (5.10)$$

avec :

$$\psi(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(f_1 + \frac{i\vec{\sigma} \cdot [\vec{k} \times \hat{n}]}{k \sin \theta} f_2 \right) \sigma_y \quad (5.11)$$

À partir de ces relations, il est possible de normaliser la fonction d'onde totale. En effet, regardons l'expression de $\Phi_{\sigma_2\sigma_1}\Phi_{\sigma_2\sigma_1}^\dagger$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_2\sigma_1}\Phi_{\sigma_2\sigma_1}^\dagger &= \Phi_{\sigma_2\sigma_1}^\dagger\Phi_{\sigma_2\sigma_1} = m \left[\bar{u}_{\sigma_1}^\dagger(k_1)U_c^\dagger\phi^\dagger\bar{u}_{\sigma_2}^\dagger(k_2) \right] \left[\bar{u}_{\sigma_2}(k_2)\phi U_c\bar{u}_{\sigma_1}(k_1) \right] \\ &= m \left[\gamma_0 u_{\sigma_1}(k_1)U_c^\dagger\phi^\dagger\gamma_0 u_{\sigma_2}(k_2) \right] \left[\bar{u}_{\sigma_2}(k_2)\phi U_c\bar{u}_{\sigma_1}(k_1) \right] \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\bar{u}^\dagger = (u^\dagger\gamma_0)^\dagger = \gamma_0^\dagger u = \gamma_0 u$. Exprimons ce terme sous la forme d'éléments de matrice et sommions l'expression sur $\sum_{\sigma_1\sigma_2}$ pour pouvoir utiliser la relation $\sum_\sigma u_\alpha^\sigma(k)\bar{u}_\beta^\sigma(k) = (\not{k} + m)_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_1\sigma_2} \Phi_{\sigma_2\sigma_1}\Phi_{\sigma_2\sigma_1}^\dagger &= m\gamma_{0,\gamma\beta}u_{\sigma_1,\beta}(k_1)U_{c,\gamma\delta}^\dagger\phi_{\delta\epsilon}^\dagger\gamma_{0,\epsilon\kappa}(\not{k}_2 + m)_{\kappa\lambda}\phi_{\lambda\mu}U_{c,\mu\nu}\bar{u}_{\sigma_1,\nu}(k_1) \\ &= m \left\{ {}^t(\not{k}_1 + m)_{\nu\beta} {}^t\gamma_{0,\beta\gamma}U_{c,\gamma\delta}^\dagger\phi_{\delta\epsilon}^\dagger\gamma_{0,\epsilon\kappa}(\not{k}_2 + m)_{\kappa\lambda}\phi_{\lambda\mu}U_{c,\mu\nu} \right\} \\ &= mTr \left\{ {}^t(\not{k}_1 + m)\gamma_0U_c^\dagger\phi^\dagger\gamma_0(\not{k}_2 + m)\phi U_c \right\} \\ \sum_{\sigma_1\sigma_2} |\Phi_{\sigma_2\sigma_1}|^2 &= mTr \left\{ U_c {}^t(\not{k}_1 + m)\gamma_0U_c^\dagger\phi^\dagger\gamma_0(\not{k}_2 + m)\phi \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Maintenant utilisons la propriété¹ $U_c\gamma_\mu U_c^\dagger = -{}^t\gamma_\mu$ pour dériver la relation suivante :

$$U_c {}^t(\not{k}_1 + m) = (-\not{k}_1 + m)U_c$$

Ces deux propriétés permettent d'obtenir :

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2} |\Phi_{\sigma_2\sigma_1}|^2 = mTr \left\{ (-\not{k}_1 + m)(-\gamma_0)\phi^\dagger\gamma_0(\not{k}_2 + m)\phi \right\}$$

En définissant $\bar{\phi} = \gamma_0\phi^\dagger\gamma_0$ et en utilisant les propriétés d'orthonormalisation (5.9) des structures de spin, nous avons la relation de normalisation de la fonction d'onde :

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\sigma_1\sigma_2} \int |\Phi_{\sigma_2\sigma_1}|^2 \frac{d^3k}{\varepsilon_k} = \frac{m}{(2\pi)^3} \int Tr \left\{ \bar{\phi}(\not{k}_2 + m)\phi(\not{k}_1 - m) \right\} \frac{d^3k}{\varepsilon_k} = \frac{m}{(2\pi)^3} \int (f_1^2 + f_2^2) \frac{d^3k}{\varepsilon_k} = 1$$

1. Voir l'annexe (V)

5.2.1 Équation pour les états liés.

Rapportons maintenant les expressions (5.6) et (5.5) dans l'équation (5.1)². Multiplions ensuite l'équation obtenue par u_2 à gauche et par u_1 à droite, et sommions sur les indices de spin $\sum_{\sigma_1 \sigma_2}$. L'équation obtenue s'exprime par :

$$\begin{aligned} [4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2] \sum_{\sigma_1 \sigma_2} u_2 (\bar{u}_2 \phi U_c \bar{u}_1) u_1 &= \frac{-m^2}{2\pi^3} \sum_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma'_1 \sigma'_2} \int D(Q) u_2 [\bar{u}_1 O_1 u_{1'}] \\ &\times [\bar{u}_2 O_2 u_{2'}] [\bar{u}_{2'} \phi' U_c \bar{u}_{1'}] u_1 \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Commençons par développer le terme de gauche en terme d'éléments de matrice :

$$\begin{aligned} [4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2] u_{2,\alpha} (\bar{u}_2 \phi U_c \bar{u}_1) u_{1,\beta} &= [\dots] u_{2,\alpha} (\bar{u}_{2,\kappa} \phi_{\kappa\lambda} U_{c,\lambda\mu} \bar{u}_{1,\mu}) u_{1,\beta} \\ &= [\dots] (\not{k}_2 + m)_{\alpha\kappa} \phi_{\kappa\lambda} U_{c,\lambda\mu} (\not{k}_1 + m)_{\beta\mu} \\ &= [\dots] (\not{k}_2 + m) \phi U_c {}^t(\not{k}_1 + m) \\ &= [\dots] (\not{k}_2 + m) \phi (-\not{k}_1 + m) U_c \\ &= -[\dots] (\not{k}_2 + m) \phi (\not{k}_1 - m) U_c \end{aligned} \quad (5.14)$$

Poursuivons par le terme de droite :

$$\begin{aligned} (\text{intégrand}) &= u_2 [\bar{u}_1 O_1 u_{1'}] [\bar{u}_2 O_2 u_{2'}] [\bar{u}_{2'} \phi' U_c \bar{u}_{1'}] u_1 \\ &= u_{2,\alpha} [\bar{u}_{1,\gamma} O_{1,\gamma\delta} u_{1',\delta}] [\bar{u}_{2,\iota} O_{2,\iota\kappa} u_{2',\kappa}] [\bar{u}_{2',\lambda} \phi'_{\lambda\mu} U_{c,\mu\nu} \bar{u}_{1',\nu}] u_{1,\beta} \\ &= (\not{k}_1 + m)_{\beta\gamma} O_{1,\gamma\delta} O_{2,\iota\kappa} (\not{k}_2' + m)_{\kappa\lambda} \phi'_{\lambda\mu} U_{c,\mu\nu} (\not{k}_1' + m)_{\delta\nu} \\ &= (\not{k}_2 + m)_{\alpha\iota} O_{2,\iota\kappa} (\not{k}_2' + m)_{\kappa\lambda} \phi'_{\lambda\mu} U_{c,\mu\nu} {}^t(\not{k}_1' + m)_{\nu\delta} {}^t O_{1,\delta\gamma} {}^t(\not{k}_1 + m)_{\gamma\beta} \\ &= (\not{k}_2 + m) O_2 (\not{k}_2' + m) \phi' (-\not{k}_1' + m) U_c {}^t O_1 U_c (-\not{k}_1 + m) U_c \\ &= (\not{k}_2 + m) O_2 (\not{k}_2' + m) \phi' (\not{k}_1' - m) \tilde{O}_1 (\not{k}_1 - m) U_c \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dans l'avant-dernière ligne nous avons utilisé la propriété $U_c U_c = 1$. Nous avons introduit la notation $\tilde{O}_1 = U_c {}^t O_1 U_c$. Multiplions maintenant l'équation à droite par U_c . Utilisons ensuite l'expression explicite de $\phi = \sum f_j S_j$, multiplions l'expression à gauche par \bar{S}_i et prenons sa trace. En appliquant la relation d'orthogonalité (5.9), le terme de gauche de l'équation s'écrit sous la forme :

$$-[\dots] f_j \text{Tr} \left\{ \bar{S}_i (\not{k}_2 + m) S_j (\not{k}_1 - m) \right\} = -[\dots] f_i$$

Cette manipulation fait apparaître dans le terme de droite un noyau \bar{V}_{ij} dont l'expression est :

$$\bar{V}_{ij} = \frac{1}{m^2 \varepsilon_{k \varepsilon_{k'}}} \int_0^{2\pi} \frac{v_{ij}}{Q^2 + \mu^2} \frac{d\varphi'}{2\pi} = \frac{1}{m^2 \varepsilon_{k \varepsilon_{k'}}} \int_0^{2\pi} \frac{v_{ij}}{A + B \cos \varphi'} \frac{d\varphi'}{2\pi} \quad (5.16)$$

2. Pour alléger l'écriture, notons $u_1 = u_{\sigma_1}(k_1)$, $u_{1'} = u_{\sigma'_1}(k'_1)$, $u_2 = u_{\sigma_2}(k_2)$ et $u_{2'} = u_{\sigma'_2}(k'_2)$ ainsi que les expressions respectives pour \bar{u} .

où les v_{ij} sont donnés par :

$$v_{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon_k \varepsilon_{k'} \text{Tr} \left\{ \bar{S}_i(k_2 + m) O_2(k_2' + m) S_j'(k_1' - m) \tilde{O}_1(k_1 - m) \right\} \quad (5.17)$$

L'équation pour les états liés est alors donnée par :

$$[4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2] f_i(k, \theta) = \frac{-m^2}{2\pi^3} \sum_{j=1}^2 \int \bar{V}_{ij}(k, \theta; k', \theta') f_j(k', \theta') \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \quad (5.18)$$

Sous cette forme, le noyau $V_{ij}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$, dépendant explicitement de $\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{k}$, $\cos \theta' = \hat{n} \cdot \hat{k}'$ et de l'angle azimutal $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi'$, apparaît déjà intégré sur φ' . Comme dans le cas des particules scalaires, nous considérons un potentiel ne dépendant que des produits scalaires $\hat{n} \cdot \hat{k}$ et $\hat{n} \cdot \hat{k}'$ et des modules k et k' . Dans ce cas, nous pouvons fixer l'axe \hat{z} parallèle à \hat{n} .

Cette équation s'exprime aussi, en notant $g_i(k, \theta) = [M^2 - 4(\vec{k}^2 + m^2)] f_i(k, \theta)$, par l'équation équivalente pour les fonctions de vertex :

$$g_i(k, \theta) = \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_j \int \frac{\bar{V}_{ij}(k, \theta; k', \theta')}{[M^2 - 4(\vec{k}'^2 + m^2)]} g_j(k', \theta') \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \quad (5.19)$$

5.2.2 Différents couplages.

Les noyaux V_{ij} vont dépendre du type de couplage. Nous nous limiterons aux couplages scalaire et pseudo-scalaire. Ce choix se justifie par le fait que ces deux couplages sont très différents, le calcul numérique étant un peu plus simple que dans le cas des couplages vectoriel ou pseudo-vectoriel.

Couplage scalaire.

Pour le couplage scalaire, nous avons $\tilde{O}_1 = O_1 = O_2 = g$. Nous introduisons $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$. Les v_{ij} peuvent être calculés en utilisant les propriétés générales des traces. Ils ont été calculés dans [44, 42] par Mangin-Brinet et al. Ils sont donnés ici :

$$\begin{cases} \frac{v_{11}}{\alpha\pi} &= -[m^2 \Delta^+ + 2\varepsilon_k \varepsilon_{k'} (\varepsilon_k \varepsilon_{k'} - k k' \cos \theta \cos \theta')] + k k' \Delta^+ \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi' \\ \frac{v_{12}}{\alpha\pi} &= -m \Delta^- (k' \sin \theta' + k \sin \theta \cos \varphi') \\ \frac{v_{21}}{\alpha\pi} &= m \Delta^- (k \sin \theta + k' \sin \theta' \cos \varphi') \\ \frac{v_{22}}{\alpha\pi} &= k k' \Delta^+ \sin \theta \sin \theta' - [m^2 \Delta^+ + 2\varepsilon_k \varepsilon_{k'} (\varepsilon_k \varepsilon_{k'} - k k' \cos \theta \cos \theta')] \cos \varphi' \end{cases} \quad (5.20)$$

avec :

$$\Delta^+ = \varepsilon_k^2 + \varepsilon_{k'}^2 \quad ; \quad \Delta^- = \varepsilon_k^2 - \varepsilon_{k'}^2$$

Nous pouvons extraire la dépendance sur φ' en écrivant $\kappa = C + D\varphi'$. Les matrices C et D sont données par :

$$\begin{aligned} C_{11} = D_{22} &= -[m^2 \Delta^+ + 2\varepsilon_k \varepsilon_{k'} (\varepsilon_k \varepsilon_{k'} - k k' \cos \theta \cos \theta')] \\ C_{22} = D_{11} &= k k' \sin \theta \sin \theta' \Delta^+ \\ C_{12} = -D_{21} &= -m k' \sin \theta' \Delta^- \\ D_{12} = -C_{21} &= -m k \sin \theta \Delta^- \end{aligned} \quad (5.21)$$

Couplage pseudo-scalaire.

Pour le couplage pseudo-scalaire nous avons $O_1 = O_2 = ig\gamma_5$. Le noyau est donné dans ce cas par :

$$\begin{cases} \frac{v_{11}}{\alpha\pi} &= [-m^2\Delta^+ + 2\varepsilon_k\varepsilon_{k'}(\varepsilon_k\varepsilon_{k'} - kk'\cos\theta\cos\theta')] - kk'\Delta^+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi' \\ \frac{v_{12}}{\alpha\pi} &= -m\Delta^-(k'\sin\theta' - k\sin\theta\cos\varphi') \\ \frac{v_{21}}{\alpha\pi} &= m\Delta^-(k\sin\theta - k'\sin\theta'\cos\varphi') \\ \frac{v_{22}}{\alpha\pi} &= kk'\Delta^+\sin\theta\sin\theta' - [-m^2\Delta^+ + 2\varepsilon_k\varepsilon_{k'}(\varepsilon_k\varepsilon_{k'} - kk'\cos\theta\cos\theta')] \cos\varphi' \end{cases} \quad (5.22)$$

5.2.3 Stabilité des solutions. Introduction d'un facteur de forme.

Les équations pour les états liés sont des équations intégrales. Ce système est ramené, à l'aide d'une décomposition angulaire, à un système d'équations intégrales unidimensionnelles. Dans chacune de ces intégrales, un noyau $V_{\lambda,\lambda'}(k, k')$ –qui dépend de la nature du couplage régissant l'interaction– doit être intégré sur des impulsions variant *a priori* entre zéro et l'infini. Numériquement, nous intégrons sur un domaine fini $k' \in [0, k_{max}]$, ce qui introduit un *cut-off* k_{max} . Dans le cas des particules scalaires, les solutions sont stables par rapport à la valeur du *cut-off* dès que celui-ci est assez grand, c'est-à-dire, elles convergent à partir d'une valeur finie du k_{max} . Ce n'est pas forcément le cas pour les fermions.

Lorsque le système n'est pas stable, c'est-à-dire, lorsque les équations intégrales divergent, il est nécessaire de modifier les noyaux pour les rendre convergents. Une façon habituelle est de remplacer la constante de couplage g par une nouvelle «constante» de couplage dépendant des impulsions :

$$g \longrightarrow gF$$

La fonction F est arbitraire, suffisamment décroissante. Elle est nommée *facteur de forme*. Il est possible de choisir, par exemple, le facteur de forme dit *dipolaire* :

$$F(\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}) = \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{\vec{q}^2 + \Lambda^2} \right)^n \quad (5.23)$$

Ce facteur de forme est souvent utilisé dans des potentiels non relativistes et nous l'avons déjà introduit dans le chapitre 2. Nous allons considérer, pour les fermions, un facteur de forme analogue au facteur de forme dipolaire, obtenu en substituant l'argument \vec{q}^2 du dénominateur par le facteur Q^2 défini par la relation (5.4). Ceci peut se justifier en considérant le fait que la limite non-relativiste de Q^2 est donnée par \vec{q}^2 . Il y a néanmoins quelques précautions à prendre avec ce facteur de forme. En effet, le dénominateur $Q^2 + \Lambda^2$ a la même forme que le dénominateur du potentiel. Il diverge donc dès que $T > \Lambda$. Il faut donc que la valeur choisie de Λ soit suffisamment grande pour ne pas introduire une composante inélastique artificielle dans la gamme d'énergie étudiée.

5.2.4 Décomposition angulaire. Calcul du potentiel projeté $V_{ij,\lambda,\lambda'}$.

Les fonctions f_i ou g_i ne dépendent que de k et θ . Elle peuvent être décomposées sur une base de polynômes de Legendre³ :

3. Nous posons $u = \cos\theta$ et $u' = \cos\theta'$.

$$g_i(k, \theta) = g_i(k, u) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} P_{\lambda}(u) f_{i,\lambda}(k)$$

Substituons par cette expression la fonction $g_i(k, \theta)$ dans l'équation (5.19). Multiplions l'expression par $P_{\lambda}(u)$ et intégrons sur u . Utilisons l'orthogonalité des polynômes de Legendre et le choix de normalisation :

$$\int_{-1}^{+1} du P_{\lambda}(u) P_{\lambda'}(u) = \frac{2}{2\lambda+1} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Le système d'équations (5.18) se décompose alors en un système d'équations couplées :

$$g_{i,\lambda}(k) = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_{j,\lambda'} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k')}{[M^2 - 4(\vec{k}'^2 + m^2)]} g_{j,\lambda'}(k') \quad (5.24)$$

avec le potentiel projeté :

$$V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k') = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} 2\pi \int du du' P_{\lambda}(u) \bar{V}_{ij}(k, u, k', u') P_{\lambda'}(u') \quad (5.25)$$

Le facteur 4π est introduit pour rendre cette décomposition équivalente à celle effectuée dans le cas scalaire pour l'onde S . Notons $c_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}}$. Les propriétés de $V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k')$ vont dépendre du type de couplage étudié.

À la différence du cas des particules scalaires, il est plus difficile de résoudre analytiquement deux des intégrales permettant d'obtenir le potentiel $V_{ij,\lambda\lambda'}$. Il est cependant possible d'effectuer analytiquement l'intégration sur φ . Les intégrations sur θ et θ' sont effectuées numériquement, par la méthode des trapèzes.

Intégration sur φ' .

Pour l'état 0^+ , les $v_{ij}(k, u, k', u', \varphi')$ peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$v_{ij}(k, u, k', u', \varphi') = C_{ij}(k, u, k', u') + D_{ij}(k, u, k', u') \cos \varphi'$$

Dans ce cas, l'intégration sur φ' est analytique :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ij}(k, u, k', u') &= \frac{1}{m^2 \varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{C_{ij} + D_{ij} \cos \varphi'}{A(k, u, k', u') + B(k, u, k', u') \cos \varphi'} \\ &= \frac{1}{m^2 \varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \left\{ C_{ij} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{1}{A + B \cos \varphi'} + D_{ij} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{A + B \cos \varphi'} \right\} \\ \bar{V}_{ij}(k, u, k', u') &= \frac{1}{2\pi m^2 \varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \left\{ \frac{BC_{ij} - AD_{ij}}{B} V_0 + \frac{2\pi}{B} D_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

avec

$$V_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{A + B \cos \varphi'} = \begin{cases} \frac{2\pi \text{Sign}(A)}{\sqrt{A^2 - B^2}} & \text{si } |A| > B \\ \frac{2i\pi}{\sqrt{B^2 - A^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.27)$$

Remarquons en particulier que le facteur V_0 est déjà apparu dans l'étude du modèle de Wick-Cutkosky. Il introduit une composante imaginaire correspondant au canal inélastique pour les états de diffusion.

Intégration sur φ' en présence d'un facteur de forme dipolaire.

Pour avoir des potentiels convergents, et à défaut d'effectuer une procédure de renormalisation, il est nécessaire d'ajouter aux potentiels un facteur de forme. Nous choisissons ici un facteur de forme analogue au facteur de forme dipolaire :

$$F(Q) = \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{Q^2 + \Lambda^2} \right)^n$$

où nous avons choisis Q^2 défini d'après (5.4). Nous fixons ici $n = 1$. Le choix d'un tel facteur de forme simplifie nos calculs. En effet, le dénominateur $Q^2 + \Lambda^2$ est similaire au dénominateur du potentiel sans facteur de forme :

$$Q^2 + \mu^2 = A + B \cos \varphi'$$

En posant $Z = A + (\Lambda^2 - \mu^2)$, nous pouvons écrire le potentiel corrigé par ce facteur de forme par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ij}(k, u, k', u') &= \frac{(\Lambda^2 - \mu^2)^2}{m^2 \varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{1}{(Z(k, u, k', u') + B(k, u, k', u') \cos \varphi')^2} \\ &\quad \times \frac{C_{ij} + D_{ij} \cos \varphi'}{A(k, u, k', u') + B(k, u, k', u') \cos \varphi'} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Cette expression peut-être calculée analytiquement. Partons pour cela de la relation (2.47) du chapitre 2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Lambda^2 - \mu^2}{Q^2 + \Lambda^2} \right)^2 \frac{1}{Q^2 + \mu^2} &= \frac{1}{Q^2 + \mu^2} - \frac{1}{Q^2 + \Lambda^2} - \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{(Q^2 + \Lambda^2)^2} \\ &= \frac{1}{A + B \cos \varphi'} - \frac{1}{Z + B \cos \varphi'} - \frac{\Lambda^2 - \mu^2}{(Z + B \cos \varphi')^2} \end{aligned}$$

Notons V_Z l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{Z + B \cos \varphi'}$ dont l'expression est identique à l'expression (5.27) pour V_0 , en changeant A par Z . D'après l'expression (5.26) et la relation suivante⁴ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{C_{ij} + D_{ij} \cos \varphi'}{(Z + B \cos \varphi')^2} = \frac{ZC_{ij} - BD_{ij}}{Z^2 - B^2} V_Z$$

nous pouvons exprimer \bar{V} , l'intégration sur φ' du potentiel avec le facteur de forme «dipolaire» par l'expression :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{ij}(k, u, k', u') &= \frac{1}{2\pi m^2 \varepsilon_k \varepsilon_{k'}} \left[\frac{BC_{ij} - AD_{ij}}{B} V_0 - \frac{BC_{ij} - ZD_{ij}}{B} V_Z \right. \\ &\quad \left. + (\Lambda^2 - \mu^2) \frac{BD_{ij} - ZC_{ij}}{Z^2 - B^2} V_Z \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

Un facteur de forme de ce type introduit néanmoins un comportement non-physique. En effet, le dénominateur en $Q^2 + \Lambda^2$ est analogue au dénominateur du potentiel sans facteur de forme. Le terme V_Z présente une composante imaginaire dès que $T > \Lambda$. Par la suite, nous choisirons toujours un paramètre Λ assez grand, en tout cas $\Lambda > \mu$ pour les états liés, et en ce qui concerne les états de diffusion, nous ne regarderons pas les régions où ce facteur de forme introduit artificiellement un déphasage inélastique.

4. Pour calculer le terme proportionnel à C de cette intégrale, il suffit de dériver V_Z par rapport à Z . Le terme avec le cosinus au numérateur est obtenu en dérivant V_Z par rapport à B .

Propriétés des noyaux projetés $V_{ij,\lambda\lambda'}$

Regardons le potentiel projeté :

$$V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k') = c_{\lambda\lambda'} \int_{-1}^{+1} du \int_{-1}^{+1} du' \int_0^{2\pi} d\varphi' P_\lambda(u) \left[\frac{C(k, u, k', u') + D(k, u, k', u') \cos \varphi'}{A(k, u, k', u') + B(k, u, k', u') \cos \varphi'} \right] P_{\lambda'}(u')$$

Effectuons les changements de variable $\tilde{u} \rightarrow -u$ et $\tilde{u}' \rightarrow -u'$. La dépendance angulaire des noyaux scalaires et pseudo-scalaires n'apparaissant que dans les produits $uu' = \cos \theta \cos \theta'$ ou bien par des sinus $\sin \theta = \sqrt{1-u^2}$ ainsi que $\sin \theta' = \sqrt{1-u'^2}$, l'intégrand est invariant sous ces changements de variables, à l'exception des polynômes de Legendre qui eux changent comme $P_\lambda(-u) = (-1)^\lambda P_\lambda(u)$. Le noyau projeté doit donc obéir à la relation :

$$V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k') = (-1)^{\lambda+\lambda'} V_{ij,\lambda\lambda'}(k, k') \quad (5.30)$$

De façon semblable au potentiel de Wick-Cutkosky, le noyau projeté sera non nul si et seulement si λ et λ' ont la même parité. Les noyaux scalaires et pseudo-scalaires découplent donc les équations pour les états liés dans deux familles à parité de λ donnée. Le premier cas correspond aux indices λ pairs. Le système d'équations à résoudre est de la forme :

$$[4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2] \begin{pmatrix} f_{i,0} \\ f_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix}_k = -4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_j \int \begin{pmatrix} V_{ij,00} & V_{ij,02} & \cdots \\ V_{ij,20} & V_{ij,22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}_{(k,k')} \begin{pmatrix} f_{j,0} \\ f_{j,2} \\ \vdots \end{pmatrix}_{k'} \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}}$$

avec $i, j \in \{1, 2\}$. Cette équation correspond bien aux états 0^+ . Le deuxième cas, où les valeurs possibles de λ sont impaires, n'est pas un état de moment cinétique total $J = 0$. En effet, il est toujours possible dans ce cas de factoriser un terme $(\hat{n} \cdot \vec{k})$ dans les f_i :

$$f_i(\vec{k}) \propto (\hat{n} \cdot \vec{k}) \sum_\lambda (\dots) f_{i,\lambda}(k)$$

Un tel cas correspond à un état caractérisé par $L = 1$. Par ailleurs, d'après l'équation (5.6) et la forme des structures de spin S_i , cet état est de parité négative. Nous ne nous intéressons pas ici à ce cas de figure.

5.2.5 Méthode de résolution des équations.

Le méthode de résolution est la même que celle utilisée dans le cas des états liés de deux particules scalaires. Elle passe par une discrétisation sur une base de splines les fonctions $g_{i,\lambda}$:

$$g_{i,\lambda}(\bar{k}_p) = \sum_q c_q^{i,\lambda} S_q(\bar{k}_p)$$

ainsi que par le choix d'un ensemble de points de collocation \bar{k}_q , sur lesquels l'équation à résoudre doit être vérifiée. L'équation pour les états liés s'écrit donc sous la forme :

$$c_q^{i,\lambda} S_q(\bar{k}_p) = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_{j,\lambda'} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{ij,\lambda\lambda'}(\bar{k}_p, k')}{[M^2 - 4(\vec{k}^2 + m^2)]} c_q^{j,\lambda'} S_q(k')$$

Sous forme matricielle, cette équation s'exprime par l'équation aux valeurs propres suivante :

$$A_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} c_q^{j,\lambda'} = \Lambda B_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} c_q^{j,\lambda'}$$

avec

$$A_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} = S_q(\bar{k}_p) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ij}$$

et

$$B_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} = 4\pi \frac{m^2}{2\pi^3} \sum_{j,\lambda'} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{ij,\lambda\lambda'}(\bar{k}_p, k')}{[M^2 - 4(\vec{k}^2 + m^2)]} S_q(k')$$

Pour résoudre cette équation, nous allons créer une bijection entre les entiers (i, λ, p) –correspondant à la structure de spin, l'onde partielle de la décomposition angulaire et la spline, respectivement– et un entier I . Cette bijection s'applique aussi à (j, λ', q) . Nous retrouvons dans ce cas une équation aux valeurs propres équivalente à celle obtenue pour les états liés de deux particules scalaires, avec la différence d'avoir à résoudre un double système d'équations aux canaux couplés.

$$A_{IJ} c_J = \Lambda B_{IJ} c_J$$

Pour retrouver, par exemple, la fonction de vertex correspondant à un état donné, il suffit d'inverser la bijection, construisant les vecteurs propres $c_q^{i,\lambda}$ à partir de c_J , ce qui permet de retrouver les fonctions $g_{i,\lambda}(k)$.

Le potentiel décomposé est calculé à partir de l'expression (5.25) ainsi que du noyau intégré sur φ dont l'expression est donnée par (5.26) –ou (5.29), en présence d'un facteur de forme bipolaire. L'intégration sur les variables u et u' est faite numériquement par la méthode des trapèzes, plus adaptée pour ce type de potentiels qu'une méthode de Gauss.

5.3 Résultats pour l'état 0^+ .

Nous nous appuyons ici sur l'étude de la stabilité des équations pour l'état lié effectué par Mangin-Brinet dans sa thèse [13] ainsi que des travaux effectués par cette dernière avec Carbonell et Karmanov [45, 44]. Nous nous appuyons sur deux de leurs constatations. Tout d'abord, ils ont montré que les solutions pour les états liés à $J^\pi = 0^+$ pour le couplage scalaire sont stables lorsque la constante de couplage est inférieure à une valeur critique α_c . Ce résultat rappelle le comportement critique observé pour les solutions de l'équation de Schrödinger avec un potentiel en $\frac{1}{r^2}$. Par la suite, nous prendrons systématiquement un facteur de forme pour le couplage scalaire. En ce qui concerne le couplage pseudo-scalaire, ils ont remarqué que ce couplage conduit à des états stationnaires mais non-physiques car «dégénérés», c'est-à-dire, pour une valeur de α donnée, il existe un quasi-continuum d'états liés. Par conséquent, nous utiliserons un facteur de forme aussi, qui nous permet d'avoir un spectre d'énergie de liaison discret.

5.3.1 Couplage scalaire.

Regardons tout d'abord le résultat de nos calculs pour le couplage scalaire. Comme dans le cas des particules sans spin, nous voulons d'abord savoir quel nombre de composantes du développement en ondes partielles est nécessaire pour décrire correctement le

système. Pour pouvoir comparer nos résultats quelle que soit la valeur de la constante de couplage, nous considérons un facteur de forme «dipolaire» (5.23) permettant de stabiliser les solutions lorsque $\alpha > \alpha_c$. Ceci aura aussi l'avantage de permettre une stabilisation rapide même lorsque un facteur de forme n'est pas indispensable. Par ailleurs, ce facteur de forme est souvent introduit dans les potentiels OBEP. Nous choisissons les paramètres ($\Lambda = 2, n = 1$) pour comparer nos résultats avec ceux de Mangin-Brinet et al.

Le tableau (5.1) montre la valeur des constantes de couplage pour différentes énergies de liaison et masses échangées, le tout pour un calcul qui prend en compte une, deux ou trois composantes du développement en polynômes de Legendre.

B	μ	$\lambda = 0$	$\lambda = 0, 2$	$\lambda = 0, 2, 4$
0.001	0.15	0.3768	0.3766	0.3766
	0.5	1.473	1.471	1.471
	1	5.708	5.695	5.695
0.01	0.15	0.6136	0.6129	0.6129
	0.5	1.898	1.895	1.895
	1	6.836	6.818	6.818
0.1	0.15	1.721	1.716	1.716
	0.5	3.708	3.696	3.696
	1	11.40	11.36	11.36
0.5	0.15	5.359	5.331	5.331
	0.5	9.025	8.977	8.977
	1	23.69	23.57	23.57

TAB. 5.1 – *Couplage scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).*

Remarquons que, comme dans le cas des particules scalaires, les résultats obtenus à trois composantes ou plus ne changent pas – à la précision montrée dans le tableau – par rapport aux résultats à deux composantes. Ces valeurs sont donc considérées comme les valeurs «physiques», *i.e.* correspondant à un calcul avec un nombre infini de composantes. Ces valeurs coïncident avec les résultats de Mangin-Brinet⁵. Remarquons que les résultats à une seule composante coïncident avec ces valeurs avec une précision supérieure à 1% quelle que soit la masse échangée et l'énergie de liaison, donc même dans des configurations où la composante relativiste peut jouer un rôle important.

L'effet de «moyenne» sur la direction du front de lumière \hat{n} est encore présent pour le couplage scalaire, c'est-à-dire qu'il est possible d'obtenir les états liés avec une bonne précision en approximant le potentiel $V_{ij}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$ par un potentiel effectif $V_{ij,00}$. Ce potentiel est obtenu en faisant la moyenne du potentiel «complet» sur la direction \hat{n} du front de lumière :

$$V_{ij,00} \sim \int d\hat{n} V_{ij}(\vec{k}, \vec{k}', \hat{n}, M^2)$$

5. Par exemple, elle trouve $\alpha = 5.32$ pour $\mu = 0.15$ et $B = 0.5$.

Il y a cependant quelques changements par rapport au modèle de Wick-Cutkosky. Pour un système à deux fermions dans l'état $J^\pi = 0^+$, il y a en effet deux composantes relativistes f_1 et f_2 de la fonction d'onde – ou de façon équivalente, les composantes g_1 et g_2 de la fonction de vertex⁶. Ce sont des fonctions scalaires de k et θ que nous avons décomposé sur une base de polynômes de Legendre. Regardons les différentes composantes $g_{i\lambda}$ participant à la décomposition angulaire de ces fonctions. La figure (5.4) montre en effet les trois premières composantes de g_1 et g_2 .

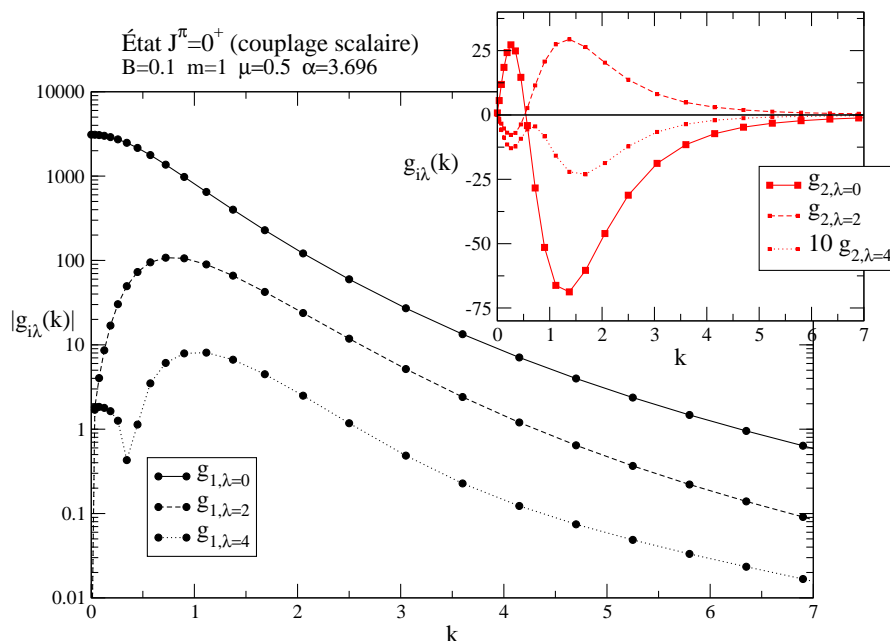


FIG. 5.4 – *Couplage scalaire : Contribution des ondes partielles à chaque composante relativiste de spin g_1 et g_2 , pour $B = 0.1, \mu = 0.5, \alpha = 3.696$.*

Considérons tout d'abord le cas de la composante de spin g_1 . La première onde partielle $g_{1,\lambda=0}$ du développement angulaire est un ordre de grandeur plus grand –en module– que la deuxième composante $g_{1,\lambda=2}$. La troisième composante $g_{1,\lambda=4}$ est elle-même au moins trois ordres de grandeur plus faible que la première composante. La fonction g_1 peut-être correctement décrite en limitant le développement angulaire à la seule première composante.

Le cas de la composante de spin g_2 est différent. En effet, les deux premières composantes du développement en polynômes de Legendre sont du même ordre de grandeur, la troisième composante étant un ordre de grandeur plus faible. En toute rigueur, prendre un potentiel «moyenné» sur \hat{n} , c'est-à-dire limiter le développement angulaire à la première composante, ne permet pas de décrire correctement l'influence de la deuxième composante relativiste g_2 sur le système. Ceci n'est cependant pas très grave pour l'obtention des observables telle que l'énergie de liaison, car cette composante est très faible par rapport à la composante g_1 , comme il est montré dans la figure (5.5). Notons que dans cette

6. Pour rappel $g_i(k, \theta) = [4(\vec{k}^2 + m^2) - M^2]f_i(k, \theta)$.

5.3. RÉSULTATS POUR L'ÉTAT 0^+ .

configuration, la fonction g_1 décroît plus vite vers zéro avec k que la fonction g_2 .

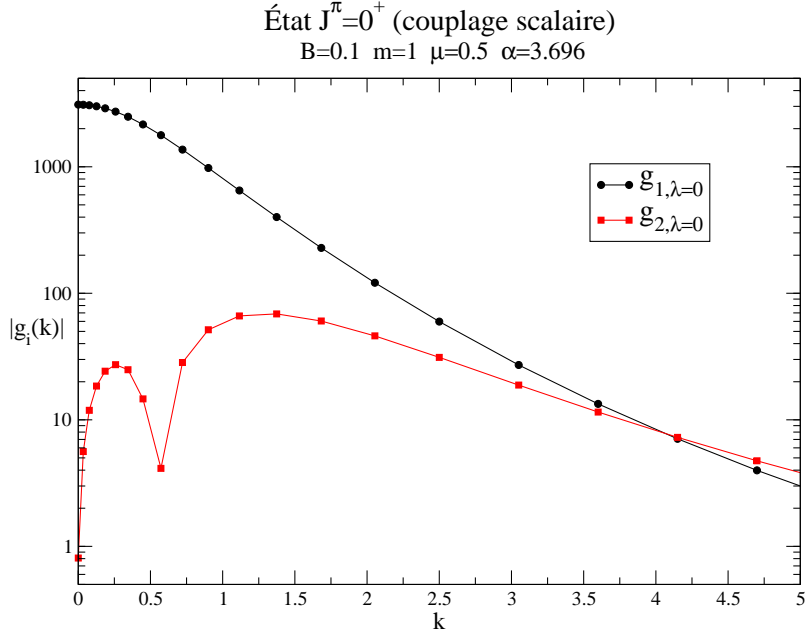


FIG. 5.5 – *Couplage scalaire : Module des composantes relativistes g_1 et g_2 , pour $B = 0.1, \mu = 0.5, \alpha = 3.696$.*

B	μ	avec V_{ij}	avec V_{11}
0.001	0.15	0.3768	0.3769
	0.5	1.473	1.474
	1	5.708	5.718
0.1	0.15	1.721	1.722
	0.5	3.708	3.712
	1	11.40	11.43

TAB. 5.2 – *Couplage scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α par un calcul complet à un canal (potentiel $V_{i,j;\lambda=0,\lambda'=0}$) et un calcul en réduisant le potentiel au seul terme $V_{i=1,j=1;\lambda=0,\lambda'=0}$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).*

Afin d'avoir une idée de l'influence de la composante g_2 sur l'énergie de liaison, nous considérons un potentiel réduit à la seule composante $V_{i=1,j=1;\lambda=0,\lambda'=0}$, les autres composantes étant nulles. Le tableau (5.2) montre en effet que l'effet de la composante V_{22} et des termes non-diagonaux du potentiel sur l'énergie de liaison est très faible. Par ailleurs, la fonction g_1 obtenue avec le potentiel réduit coïncide avec la fonction g_1 calculée avec le potentiel au complet.

Comparaison avec le modèle de Wick-Cutkosky.

Il est intéressant de regarder les différences entre ce modèle de systèmes à deux fermions avec un couplage scalaire et le modèle de Wick-Cutkosky pour des systèmes à deux particules scalaires. Le potentiel corrigé du facteur de forme choisi ($\Lambda = 2$, $n = 1$) est répulsif en comparaison avec le potentiel de Wick-Cutkosky. Or nous avons remarqué dans le chapitre 3 que ce potentiel relativiste est lui-même répulsif en comparaison avec le potentiel de Yukawa. La figure (5.6) montre en effet l'évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage pour $\mu = 0.5$.

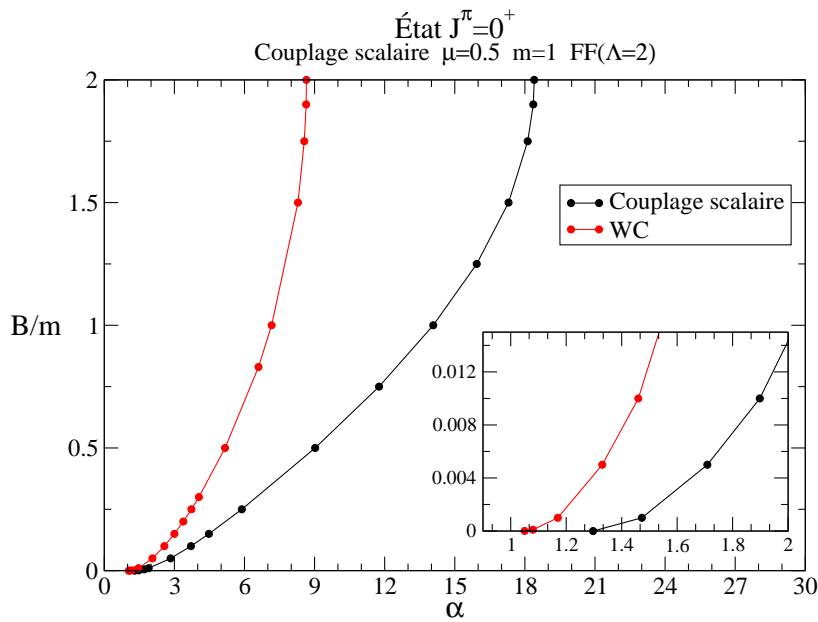


FIG. 5.6 – *Couplage scalaire : Évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage pour $\mu = 0.5$.*

5.3.2 Couplage pseudo-scalaire.

Le cas du couplage pseudo-scalaire pose plus de problèmes. En effet, il n'est plus possible de limiter le développement en polynômes de Legendre à la première composante. Le tableau (5.3) montre en effet qu'il faut au moins trois composantes, c'est-à-dire coupler les composantes g_0, g_2, g_4 pour obtenir des valeurs de la constante de couplage approchant du résultat «physique» avec une précision supérieure à 1%. Le calcul limité à deux composantes donne un résultat dont l'écart avec la valeur «physique» est inférieur à 2%. Quant à la valeur «physique» elle-même, signalons que le calcul converge nettement moins rapidement que dans le cas du couplage scalaire. Dans ce dernier, les valeurs calculées sont stables à quatre chiffres significatifs à partir de deux composantes. Pour le couplage pseudo-scalaire, par contre, il faut au moins six composantes pour atteindre un résultat stable à quatre chiffres significatifs pour des énergies de liaison faibles

($B = 0.001$). Pour $B = 0.5$, il suffit par contre de trois composantes. Les résultats sont proches de ceux de Mangin-Brinet, mais il faut prendre en considération un nombre important de composantes du développement angulaire. Par exemple, elle trouve $\alpha = 1462$ pour $B = 0.5$ avec $\mu = 0.15$. Il faut au moins trois composantes pour que notre calcul donne $\alpha = 1472$.

B	N_{comp}	$\alpha(\mu = 0.15)$	$\alpha(\mu = 0.5)$	$\alpha(\mu = 1)$
0.001	$\lambda = 0$	208.9	238.2	1556.0
	$\lambda = 0, 2$	193.6	221.7	1437.0
	$\lambda = 0, 2, 4$	191.9	219.8	1424.4
	$\lambda = 0, 2, \dots, 6$	191.4	219.4	1421.7
	$\lambda = 0, 2, \dots, 8$	191.3	219.3	1421.2
	$\lambda = 0, 2, \dots, 10$	191.2	219.2	1421.1
0.1	$\lambda = 0$	1164.0	911.0	4653.7
	$\lambda = 0, 2$	729.4	732.9	3930.3
	$\lambda = 0, 2, 4$	726.5	730.1	3904.2
	$\lambda = 0, 2, \dots, 6$	726.5	729.8	3901.7
	$\lambda = 0, 2, \dots, 8$	726.5	729.8	3901.6
0.5	$\lambda = 0$	3273.6	2794.8	12584
	$\lambda = 0, 2$	1499.6	1743.3	8960.3
	$\lambda = 0, 2, 4$	1472.4	1735.1	8940.3
	$\lambda = 0, 2, \dots, 6$	1471.6	1734.8	8939.9
	$\lambda = 0, 2, \dots, 8$	1471.5	1734.8	8939.8

TAB. 5.3 – *Couplage pseudo-scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes, avec un facteur de forme ($\Lambda = 1.3, n = 1$).*

L'effet de moyenne n'est plus présent pour le couplage pseudo-scalaire. Regardons en détails les composantes relativistes de la fonction de vertex. La figure (5.7) montre les différents termes du développement en polynômes de Legendre des fonctions g_1 et g_2 . Considérons d'abord le cas de la fonction g_1 . La composante $g_{1,\lambda=0}$ de cette fonction présente des zéros pour $k = 0.4$ et $k = 1.16$. Bien qu'avant $k = 0.1$ elle soit considérablement plus grande –en module– que les composantes suivantes $g_{1,\lambda=2}$ et $g_{1,\lambda=4}$, après le premier zéro elle est du même ordre de grandeur que $g_{1,2}$. La composante $g_{1,4}$ est par contre un ordre de grandeur plus faible. À la différence du couplage scalaire, nous ne pouvons plus considérer que la première composante du développement angulaire soit dominante et suffisse à décrire correctement la fonction g_1 .

Considérons maintenant la composante g_2 . Les deux premières composantes sont de même ordre de grandeur. Toutefois, la première composante $g_{2,0}$ a des extrema entre deux ou trois fois plus importants que ceux de la composante $g_{2,2}$. Nous observons un comportement comparable à celui observé pour le couplage scalaire, la fonction g_2 nécessitant au moins deux termes du développement angulaire pour être décrite correctement.

Comparons maintenant les composantes relativistes g_1 et g_2 . La figure (5.8) montre les fonctions $g_{1,\lambda}$ et $g_{2,\lambda}$ pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Notons qu'à la différence du couplage

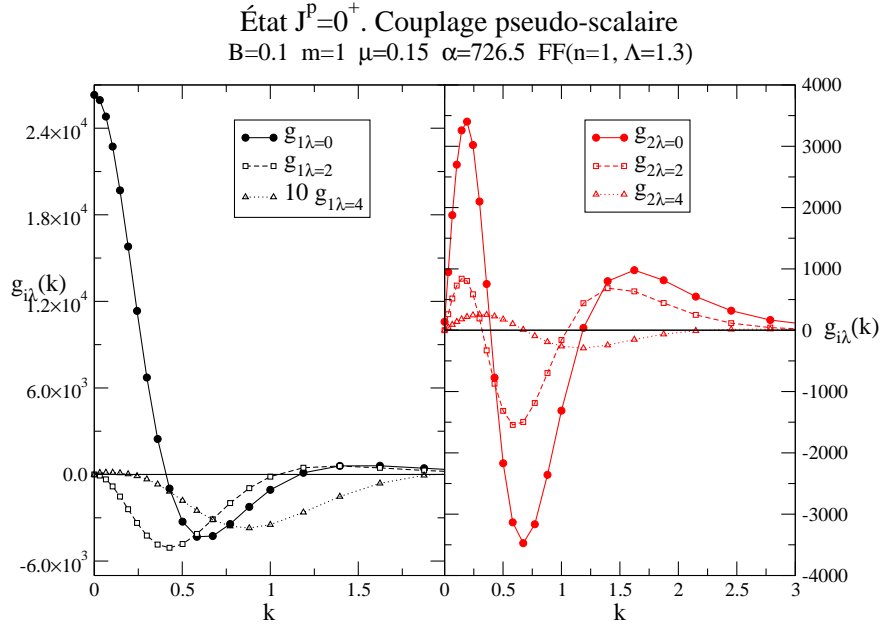


FIG. 5.7 – *Couplage pseudo-scalaire : Contribution des ondes partielles à chaque composante relativiste de spin g_1 et g_2 . À gauche, les trois premières composantes de la décomposition angulaire de g_1 , à droite, idem. pour g_2 . ($B = 0.1, \mu = 0.15, \alpha = 726.5$).*

scalaire, dans les deux cas, la composante relativiste g_2 n'est plus négligeable devant la composante g_1 . Par ailleurs, ces deux fonctions sont proches après le premier nœud de g_1 .

Le fait que, pour le couplage pseudo-scalaire, le premier terme de la décomposition angulaire soit insuffisant pour obtenir les états liés s'explique donc par deux facteurs. D'une part, la composante $g_{1,\lambda=0}$ possède des nœuds, ce qui explique en partie le fait qu'elle ne soit plus prépondérante vis-à-vis des autres composantes du développement angulaire. D'autre part, la composante relativiste g_2 est assez importante et il n'est plus possible d'approximer le potentiel par la seule composante V_{11} . Cette situation va compliquer l'extraction des déphasages dans le cas des de la diffusion.

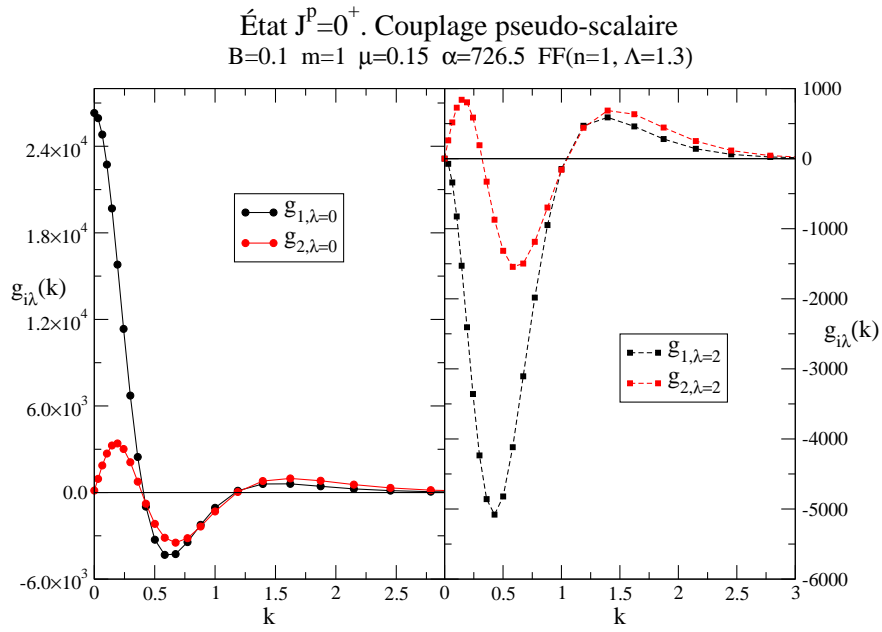


FIG. 5.8 – Couplage pseudo-scalaire : Comparaison des composantes relativistes g_1 et g_2 pour une onde partielle donnée. À gauche, la première composante du développement angulaire, à droite la deuxième composante ($B = 0.1, \mu = 0.15, \alpha = 726.5$.)

5.4 États de diffusion pour l'état $J^\pi = 0^+$.

Pour aborder la diffusion entre deux fermions dans l'état 0^+ , nous allons partir de l'expression de la fonction d'onde (5.6) menant à l'équation pour les états liés (5.18), afin d'obtenir son développement asymptotique infiniment loin du centre diffuseur. Réécrivons la fonction d'onde dans le système de référence $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = 0$:

$$\Phi_{\sigma_2\sigma_1} = \sqrt{m} w_{\sigma_2}^\dagger \psi(\vec{k}, \hat{n}) w_{\sigma_1}^\dagger \quad (5.31)$$

avec :

$$\psi(\vec{k}, \hat{n}) = \frac{1}{2} \left(f_1 + i \frac{\vec{\sigma} \cdot [\vec{k} \times \hat{n}]}{k \sin \theta} f_2 \right) \sigma_y \quad (5.32)$$

Dans le cas des particules scalaires, nous avons écrit la fonction d'onde diffusée sous la forme suivante :

$$\psi(\vec{k}, \hat{n}) \sim \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_0) + \chi(\vec{k}, \vec{k}_0)$$

Dans le cas des fermions, nous voulons écrire un développement asymptotique équivalent qui respecte cependant la structure de spin. L'idée poursuivie est d'effectuer un développement asymptotique nous permettant d'utiliser des expressions des noyaux qui soient identiques tant pour le calcul des états de diffusion que pour les états liés. Introduisons le paramètre $k_0 = \frac{1}{4}M^2 - m^2$ et partons de l'équation pour les états liés :

$$(k_0^2 - k^2) f_i(k, \theta) = \frac{m^2}{(2\pi)^3} \sum_j \int \bar{V}_{ij}(k, \theta; k', \theta') f_j(k', \theta') \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}}$$

Nous exprimons le comportement asymptotique du vecteur d'état en considérant une onde plane incidente d'impulsion \vec{k}_0 (avec une structure de spin donnée) arrivant sur un centre diffuseur. Très loin de ce centre diffuseur, l'onde diffusée contient une composante non modifiée –l'onde plane– et une composante diffusée. Ceci se traduit en changeant les fonctions f_i par l'expression :

$$f_{jj_0}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_0) \delta_{jj_0} + \chi_{jj_0}(\vec{k} - \vec{k}_0)$$

où l'indice j_0 est introduit pour paramétrer les structures de spin de l'onde incidente. Remarquons en particulier qu'il n'est pas possible d'isoler une seule composante de spin dans l'onde incidente. Pour obtenir une solution correspondant à un état de diffusion, la fonction χ introduite doit vérifier l'équation suivante :

$$(k_0^2 - k^2) \chi_{ij_0}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{(2\pi)^3} \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \bar{V}_{ij_0}(k, \theta; k_0, \theta_0) + \frac{m^2}{(2\pi)^3} \sum_j \int V_{ij}(k, \theta; k', \theta') \chi_{jj_0}(\vec{k}', \vec{k}_0) \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}}$$

Absorbons le facteur $\frac{m}{(2\pi)^3}$ dans le noyau et introduisons $T_{ij}(\vec{k}, \vec{k}_0) = (k_0^2 - k^2) \chi_{ij}(\vec{k}, \vec{k}_0)$. Nous obtenons l'ensemble d'équations couplées suivant :

$$T_{ij_0}^\pm(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \bar{V}_{ij_0}(k, \theta; k_0, \theta_0) + \sum_j \int \frac{\bar{V}_{ij}(k, \theta; k', \theta')}{k_0^2 - k'^2 \mp i\epsilon} T_{jj_0}^\pm(\vec{k}', \vec{k}_0) \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}}$$

Nous avons ici une équation équivalente à l'équation de Lippmann-Schwinger pour la diffusion. Il s'agit maintenant d'une équation matricielle. À la place de la matrice T du cas des particules scalaires, nous trouvons quatre composantes indexées par les indices i, j , correspondant aux structures de spin. Le terme inhomogène, provenant de l'onde plane, ne change pas la structure de spin incidente, à la différence du terme intégré, où il y a couplage entre ces structures.

Comme dans le cas des particules scalaires et pour les mêmes raisons –il s'agit d'une quantité réelle lorsque le potentiel est réel qui ne devient complexe que lorsque le canal inélastique s'ouvre–, nous préférons utiliser la matrice \mathcal{K} dans nos calculs. Nous avons donc à résoudre l'équation suivante :

$$\mathcal{K}_{ij0}(\vec{k}, \vec{k}_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \bar{V}_{ij0}(k, \theta; k_0, \theta_0) + \sum_j \int_{PP} \frac{\bar{V}_{ij}(k, \theta; k', \theta')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{jj0}(\vec{k}', \vec{k}_0) \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \quad (5.33)$$

où \int_{PP} correspond à la partie principale de l'intégrale. Nous omettrons cette écriture par la suite. De façon matricielle, nous avons :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix}_{\vec{k}, \vec{k}_0} = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}_{\vec{k}, \vec{k}_0} + \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\varepsilon_{k'}} \frac{1}{k_0^2 - k'^2} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}_{\vec{k}, \vec{k}'} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11} & \mathcal{K}_{12} \\ \mathcal{K}_{21} & \mathcal{K}_{22} \end{pmatrix}_{\vec{k}', \vec{k}_0}$$

5.4.1 Décomposition angulaire de l'équation pour la diffusion.

Le potentiel ne dépend que des variables scalaires k, k' et des angles θ et θ' . Partons de la décomposition angulaire introduite pour les états liés et du potentiel décomposé (5.25). La décomposition angulaire du potentiel est de la forme :

$$\bar{V}_{ij}(k, \theta, k', \theta') = \sum_\lambda 2\sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} P_\lambda(u) V_{ij, \lambda\lambda'}(k, u, k', u') P_{\lambda'}(u') \quad (5.34)$$

Avec $u = \cos \theta$ et $u' = \cos \theta'$. Notons aussi $u_0 = \cos \theta_0 = \hat{n} \cdot \hat{k}_0$. Introduisons cette expression dans l'équation (5.33). Multiplions l'équation ainsi obtenue par $P_\lambda(u) P_{\lambda_0}(u_0)$ et intégrons le tout sur u et u_0 . En introduisant la matrice \mathcal{K} décomposée :

$$\mathcal{K}_{ij, \lambda\lambda'}(k, k') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}} \sqrt{\frac{2\lambda'+1}{2}} \int du du' P_\lambda(u) \mathcal{K}_{ij}(k, u, k', u') P_{\lambda'}(u') \quad (5.35)$$

nous en déduisons l'expression suivante pour l'équation de la diffusion :

$$\mathcal{K}_{ij0, \lambda\lambda_0}(k, k_0) = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{ij0, \lambda\lambda_0}(k, k_0) + 4\pi \sum_{\lambda', j} \int \frac{k'^2 dk'}{\varepsilon_{k'}} \frac{V_{ij, \lambda\lambda'}(k, k')}{k_0^2 - k'^2} \mathcal{K}_{jj0, \lambda\lambda_0}(k', k_0) \quad (5.36)$$

Ce système d'équations couplées est identique à celui retrouvé pour les particules scalaires, mis à part la dépendance dans les indices de spin. Les propriétés de parité du potentiel impliquent la séparation de ce système d'équations en deux sous-systèmes : lorsque les indices λ, λ' , etc. sont pairs ou lorsqu'ils sont impaires. D'après ce qui a été

montré dans le cas des états liés, ce deuxième cas ne correspond pas à un état de diffusion dans l'état $J^\pi = 0^+$. Seul le cas où les indices sont pairs est pertinent pour l'état 0^+ . Comme dans le cas des particules scalaires, l'indice λ_0 correspond à la décomposition angulaire de l'onde incidente. Pour que la composante non-diffusée de la fonction d'onde soit dans l'état 0^+ , nous devons prendre $\lambda_0 = 0$.

5.4.2 Extraction des déphasages.

Considérons le cas où nous fixons $\lambda_0 = 0$ et nous limitons la décomposition en polynômes de Legendre au seul premier terme \mathcal{K}_{00} . Pour le modèle de Wick-Cutkosky la résolution de l'équation de la diffusion n'introduit comme solution qu'une seule matrice \mathcal{K}_{00} , dont la valeur sur couche $\mathcal{K}_{00}(k_0, k_0)$ permet d'obtenir le déphasage δ_0 par la relation :

$$\tan \delta = -2\pi^2 m k_0 \mathcal{K}_{00}(k_0, k_0) \quad (5.37)$$

La structure de spin de la fonction d'onde élargit le système à un ensemble de quatre équations couplées, ce qui implique que la résolution fait apparaître quatre solutions $\mathcal{K}_{ij,00}$. Nous souhaitons obtenir deux déphasages, correspondant aux deux structures de spin existantes dans les systèmes à $J^\pi = 0^+$. Pour cela, nous rangeons les expressions sur couche $\mathcal{K}_{ij,00}(k_0, k_0)$ dans une matrice 2×2 que nous diagonalisons. Les valeurs propres, notées \mathcal{K}_{00}^+ et \mathcal{K}_{00}^- , permettent d'obtenir deux déphasages notés δ_+ et δ_- à partir de l'équation (5.37). Lorsque plusieurs composantes du développement angulaire sont prises en compte, le nombre de déphasages est doublé pour chaque onde partielle supplémentaire.

5.4.3 Ouverture d'un canal inélastique.

Remarquons que les noyaux pour l'état 0^+ ont le même dénominateur que celui correspondant au cas des particules scalaires. Nous avons montré dans le chapitre précédent que ce dénominateur peut s'annuler dès que $T > \mu$, T étant l'énergie cinétique du système et μ la masse du boson échangé. Dans ce cas, le potentiel devient complexe, comme l'indiquent les expressions (5.26) et (5.27) du potentiel. Comme dans le cas des particules scalaires, nous introduisons un déphasage complexe traduisant l'ouverture du processus inélastique $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + 3'$. Les déphasages imaginaires correspondant aux structures de spin sont notés δ_+'' et δ_-'' .

5.4.4 Méthode de résolution.

La résolution numérique de l'équation (5.36) se fait selon une démarche identique à celle suivie pour le cas du potentiel de Wick-Cutkosky (voir 4.4.2). La matrice \mathcal{K} est discrétisée sur une base de fonctions de spline :

$$\mathcal{K}_{ij_0, \lambda \lambda_0}(\bar{k}_p, k_0) = \sum_q C_q^{\lambda, ij_0}(k_0, \lambda_0) S_q(\bar{k}_p)$$

L'équation est résolue pour des valeurs de k_0, λ_0 données. L'indice j_0 , par contre, ne peut pas être fixé. La singularité en $\frac{1}{k_0^2 - k'^2}$ est traitée comme dans le cas des particules scalaires.

5.5. RÉSULTATS POUR L'ÉTAT 0^+ AVEC UN COUPLAGE SCALAIRE.

Nous retrouvons des expressions identiques aux équations (4.15), (4.16) et (4.17), avec pour seule différence deux indices supplémentaires dus à la structure de spin. Notons :

$$A_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} = S_q(\bar{k}_p) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ij} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} B_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} = & 4\pi m \int_{\Delta_I} \frac{dk'}{k_0^2 - k'^2} \left\{ \frac{k'^2}{\varepsilon_{k'}} V_{ij,\lambda\lambda'}(\bar{k}_p, k') S_q(k') - \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{ij,\lambda\lambda'}(\bar{k}_p, k_0) S_q(k_0) \right\} \\ & - 4\pi m \frac{k_0^2}{\varepsilon_{k_0}} V_{ij,\lambda\lambda'}(\bar{k}_p, k_0) \frac{1}{2k_0} \log \frac{(k_0 + a)(k_0 - b)}{(k_0 - a)(k_0 + b)} S_q(k_0) \end{aligned} \quad (5.39)$$

où $\int_{\Delta_I} = \int_a^b$ est l'intégration sur l'intervalle dans lequel la spline $S_q(k')$ est non nulle. Le terme inhomogène est donné par :

$$Y_p^{\lambda,i} = \frac{m}{\varepsilon_{k_0}} V_{\lambda\lambda_0,ij_0}(\bar{k}_p, k_0) \delta_{ij_0} \quad (5.40)$$

Nous devons résoudre le système linéaire suivant :

$$(A - B)_{pq}^{ij,\lambda\lambda'} C_q^{\lambda',jj_0} = Y_p^{\lambda,ij_0} \quad (5.41)$$

Pour établir une bijection, il y a cependant une différence. En effet, nous pouvons construire une bijection entre les entiers $(i, \lambda, p) \rightarrow I$ et entre $(j, \lambda', q) \rightarrow J$. Dans ce cas, cependant, l'expression du terme inhomogène reste asymétrique, l'indice j_0 restant non rangé dans une bijection. Pour éviter le problème et faciliter la résolution numérique, nous associerons deux entiers λ'' et n à j_0 pour établir la bijection $(j_0, \lambda'', n) \rightarrow K$. L'équation matricielle à résoudre s'exprime alors par :

$$(A - B)_{IJ} C_{JK} = Y_{IK}$$

L'extraction des déphasages est faite en inversant la bijection, puis en interpolant par les fonctions de spline la valeur sur couche.

5.5 Résultats pour l'état 0^+ avec un couplage scalaire.

5.5.1 Comparaison des déphasages δ_+ et δ_- .

Dans le cas du couplage scalaire, nous nous appuyons sur le fait que la seule première composante du développement angulaire permet d'obtenir l'énergie de liaison des états liés avec une très bonne précision. Nous ne considérons donc, comme dans le cas du modèle de Wick-Cutkosky, que les déphasages δ_{00} . Il existe cependant une différence importante avec le cas des particules scalaires. En effet, la résolution numérique du système d'équations nous permet d'obtenir deux déphasages notés δ_+ et δ_- . Le premier déphasage est plus important que le deuxième, mais ce dernier n'est pas négligeable, surtout pour des valeurs importantes de k_0 . La figure (5.9) montre en effet que le déphasage δ_+ vaut un peu plus de deux fois le déphasage δ_- au voisinage du seuil, pour $\alpha = 1, \mu = 0.5$.

Notons que le déphasage δ_+ coïncide avec le déphasage obtenu en ne conservant que la composante V_{11} du potentiel. Le déphasage δ_+ s'interprète donc comme celui correspondant à la structure de spin f_1 de la fonction d'onde, et possède donc une limite

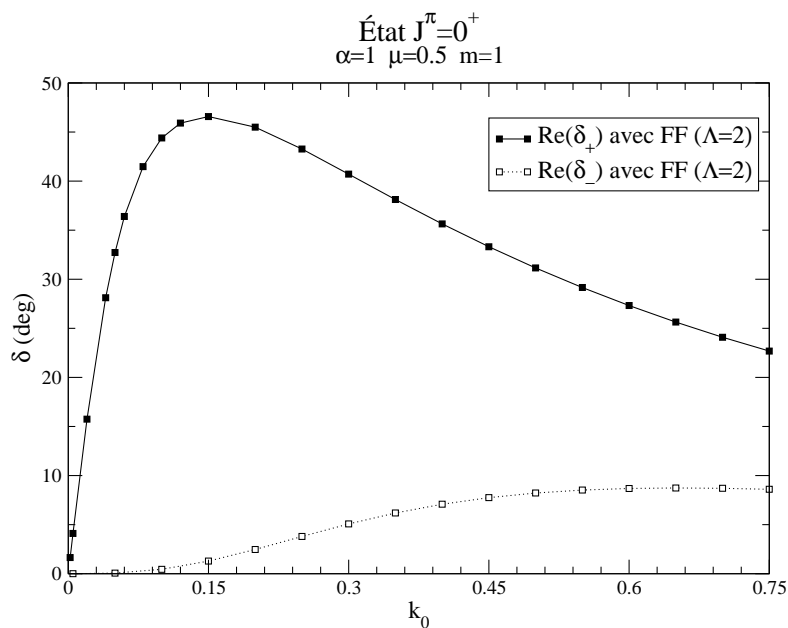


FIG. 5.9 – *Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, $m = 1$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2$)).*

non-relativiste assez claire. La deuxième déphasage est plus difficile à interpréter. Changeons légèrement la constante de couplage pour retrouver une configuration possédant un état lié⁷. Pour cela, nous prenons $\alpha = 1.2$ et $\alpha = 1.4$.

La figure (5.10) montre que l'évolution du déphasage δ_- est très régulière en fonction de α . Ce déphasage est complètement «insensible» à l'existence d'une configuration possédant un état lié. Le déphasage δ_+ , par contre, présente le comportement «physique» attendu, c'est-à-dire, il évolue sensiblement avec la constante de couplage et décrit correctement l'existence d'un état lié, en accord avec le théorème de Levinson.

Une autre différence intéressante entre les deux déphasages apparaît aussi vis-à-vis d'un changement du facteur de forme. En effet, la figure (5.11) montre les déphasages pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$ avec des potentiels corrigés d'un facteur de forme dipolaire. Deux paramètres sont choisis : $\Lambda = 2$ et $\Lambda = 1.3$. Notons que le déphasage δ_+ est très sensible à ce paramètre. Par contre, le déphasage δ_- change très peu pour des petites valeurs de k_0 , pour ne varier que de 20% au voisinage du seuil, tandis que le déphasage δ_+ varie de près de 40% au seuil.

5.5.2 Calcul des énergies de liaison par les paramètres à basse énergie

Vérifions maintenant que le calcul des déphasages est cohérent avec celui des états liés. Pour cela, nous calculons les paramètres à basse énergie des déphasages relati-

7. Nous utilisons les calculs précédents pour les états liés –cf. la figure (5.6)

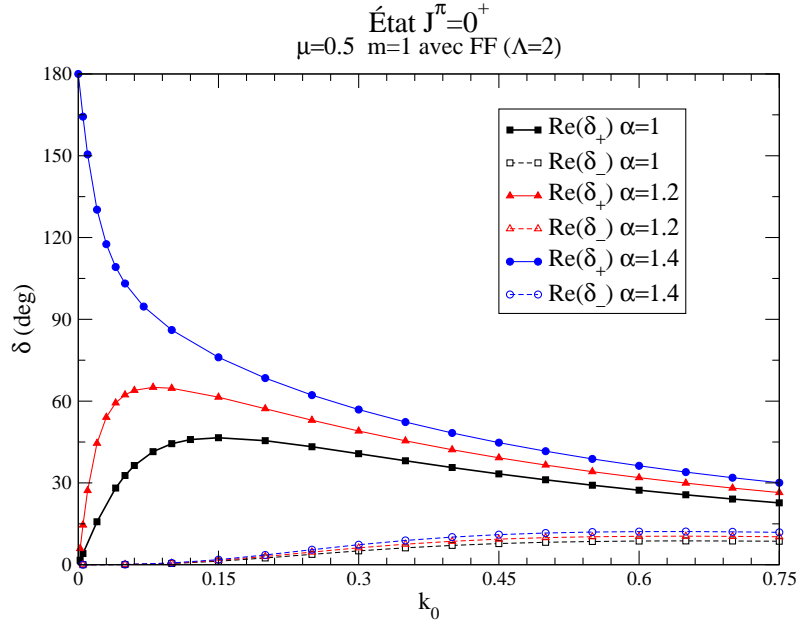


FIG. 5.10 – *Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil pour trois valeurs de la constante de couplage $\alpha = 1$ (en noir), $\alpha = 1.2$ (en rouge) et $\alpha = 1.4$ (en bleu). ($\mu = 0.5$, $m = 1$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2$)).*

vistes lorsqu'il existe un état faiblement lié. En effet, l'énergie de liaison⁸ est donnée par $E = -\frac{p_0^2}{m}$, p_0 étant la valeur pour la quelle la fonction :

$$f = \frac{1}{p_0 \cotan \delta - i p_0}$$

possède un pôle. Nous calculons les déphasages pour des petites valeurs de k_0 et calculons les paramètres à basse énergie du déphasage donnés par le développement :

$$k_0 \cotan \delta = \frac{-1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 k_0^2 + o(k_0^4)$$

À partir de ces paramètres, nous calculons les solutions de l'équation :

$$\frac{-1}{a_0} + \frac{1}{2} r_0 p_0^2 - i p_0 = 0$$

Le tableau (5.4) montre les énergies de liaison calculées à partir des déphasages δ_+ et directement en résolvant l'équation pour les états liés. Les énergies de liaison obtenues à partir des déphasages coïncident avec celles calculées directement.

8. Pour rappel, $B = -E$, avec la masse totale $M = 2m - B$.

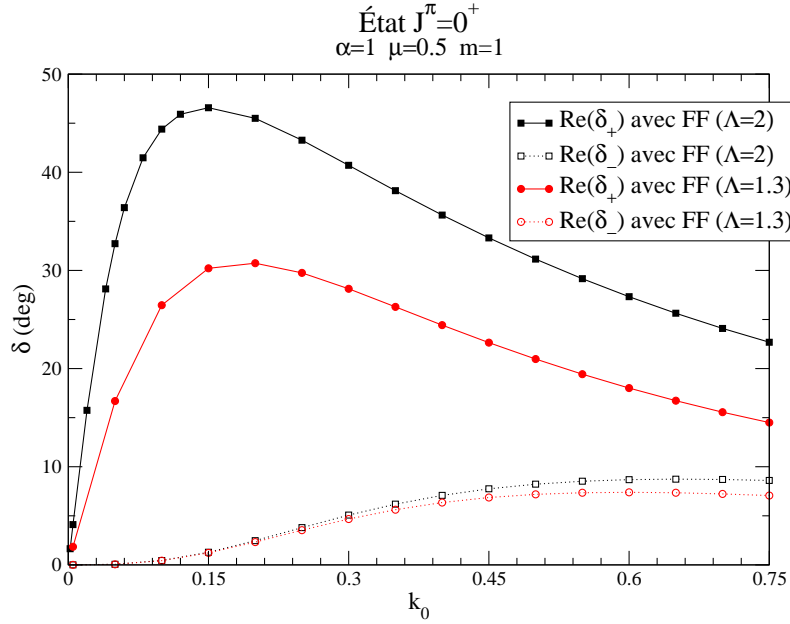


FIG. 5.11 – *Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil avec un facteur de forme dipolaire, avec deux paramétrisations différentes : $\Lambda = 2$ et $\Lambda = 1.3$ ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, $m = 1$).*

μ	α	a_0	r_0	$B_{\text{par } \delta}$	Calcul direct
0.15	0.3768	38.05	10.42	0.00099	0.001
	0.6136	13.32	5.17	0.010	0.01
0.5	1.473	34.34	4.78	0.00099	0.001
	1.898	12.45	3.85	0.0099	0.01

TAB. 5.4 – *Couplage scalaire : Calcul des énergies de liaison à partir des paramètres à basse énergie des déphasages. Les déphasages sont calculés avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).*

5.5.3 Comparaison avec le modèle de Wick-Cutkosky.

Comparons maintenant les déphasages obtenus dans notre version relativiste du modèle de Wick-Cutkosky. Nous effectuons cette comparaison car le modèle de Wick-Cutkosky dans la LFD présente l'ouverture d'un canal inélastique lorsque l'énergie cinétique du système dépasse la masse de la particule échangée. Considérons tout d'abord un cas où nous prenons la même constante de couplage pour les deux modèles. La figure (5.12) montre les déphasages δ_+ et δ_- ainsi que le déphasage δ_{WC} pour une configuration sans état lié ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$). Le potentiel correspondant aux fermions est corrigé d'un facteur de forme dipolaire avec $\Lambda = 2$ et $n = 1$. Par contre, le potentiel de Wick-Cutkosky n'est pas modifié par un facteur de forme. Comme prévu, le système à deux fermions est répulsif.

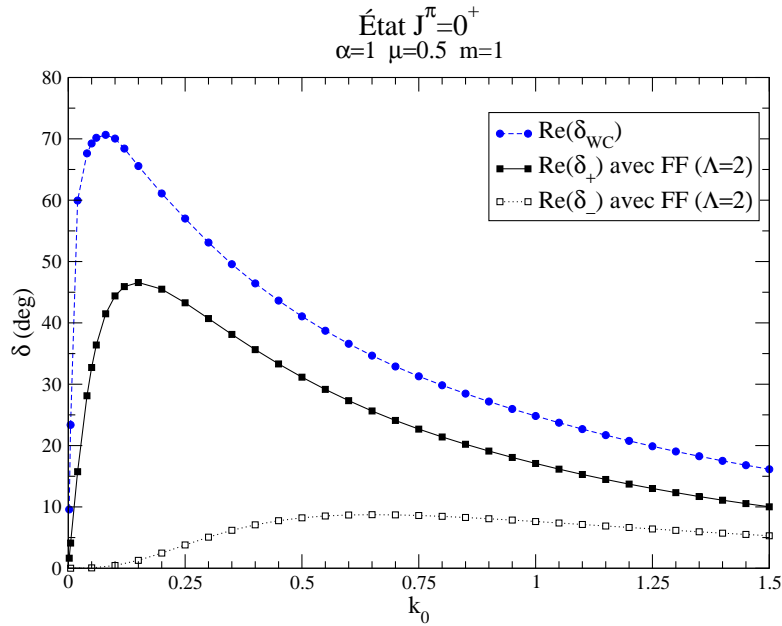


FIG. 5.12 – *Couplage scalaire : Comparaison des déphasages élastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky. ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, $m = 1$).*

Il est intéressant aussi de comparer les déphasages pour des systèmes possédant le même spectre. Choisissons deux configurations telles que le système de deux particules scalaires et le système de deux fermions couplés (avec un couplage scalaire) possèdent, tous les deux, un état lié de même énergie de liaison. La figure (5.13) montre une telle configuration. Les déphasages δ_+ correspondant aux fermions sont encore répulsifs en comparaison avec les déphasages du modèle de Wick-Cutkosky.

5.5.4 Déphasages inélastiques.

Une caractéristique importante des noyaux dérivés de la LFD est d'ouvrir automatiquement un canal inélastique dès que l'énergie cinétique dépasse le seuil de création

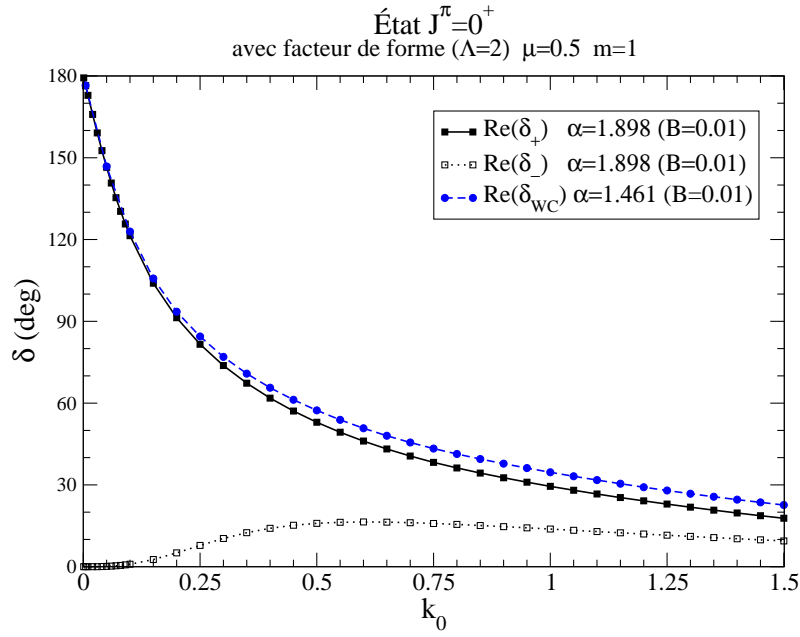


FIG. 5.13 – *Couplage scalaire : Comparaison des déphasages élastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky pour des systèmes ayant le même spectre (ici, $B = 0.01$, $\mu = 0.5$).*

du boson échangé. La figure (5.14) montre une telle configuration. Nous avons choisi $\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, configuration pour laquelle le seuil de création est à $k_s = 0.75$ (en unités de masse). Dans cette figure sont représentés les déphasages inélastiques δ_+'' et δ_-'' , ainsi que les déphasages inélastiques correspondant à la formulation du modèle de Wick-Cutkosky dans le cadre de la LFD. Remarquons tout d'abord que, de façon semblable aux déphasages réels, les déphasages inélastiques δ_+'' sont jusqu'à cinq fois plus grands que les déphasages inélastiques δ_-'' . Comme pour les déphasages réels, la figure (5.15) montre les déphasages correspondant à des systèmes ayant le même spectre.

Ces deux déphasages sont positifs. Ceci n'est cependant pas une garantie du respect de l'unitarité de la matrice S . Comme dans le cas des particules scalaires, il est possible que l'approximation *ladder* soit insuffisante pour décrire correctement les états de diffusion. La prise en compte de la self-énergie est cependant une tâche plus ardue dans le contexte des fermions. En effet, la contribution de la self-énergie dépend du couplage. L'expression de la self-énergie est matricielle et le traitement numérique est plus complexe. De plus, nous avons vu dans le cas des particules scalaires, qu'après la prise en compte de la self-énergie il est nécessaire de renormaliser la masse du nucléon afin de respecter la condition *sur-couche* $p^2 = m^2$ imposée par la LFD. Dans le cas des fermions, Karmanov, Mathiot et Smirnov ont montré dans [46] qu'il est nécessaire d'introduire des contre-termes supplémentaires permettant de restaurer l'invariance par rotation du système⁹.

9. Pour plus de détails sur la contribution de la self-énergie pour les fermions, voir aussi l'article de Dugne, Karmanov et Mathiot [47].

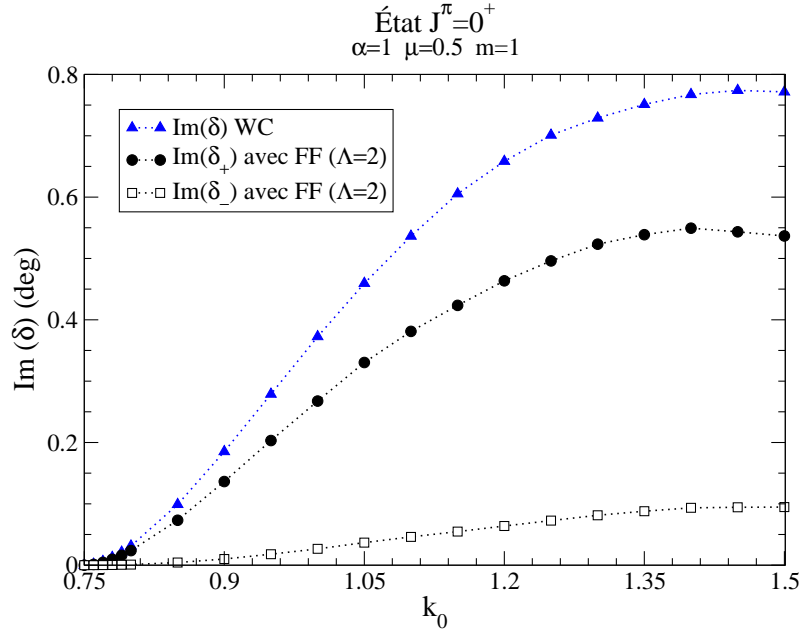


FIG. 5.14 – *Couplage scalaire : Comparaison des déphasages inélastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky. ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$, $m = 1$).*

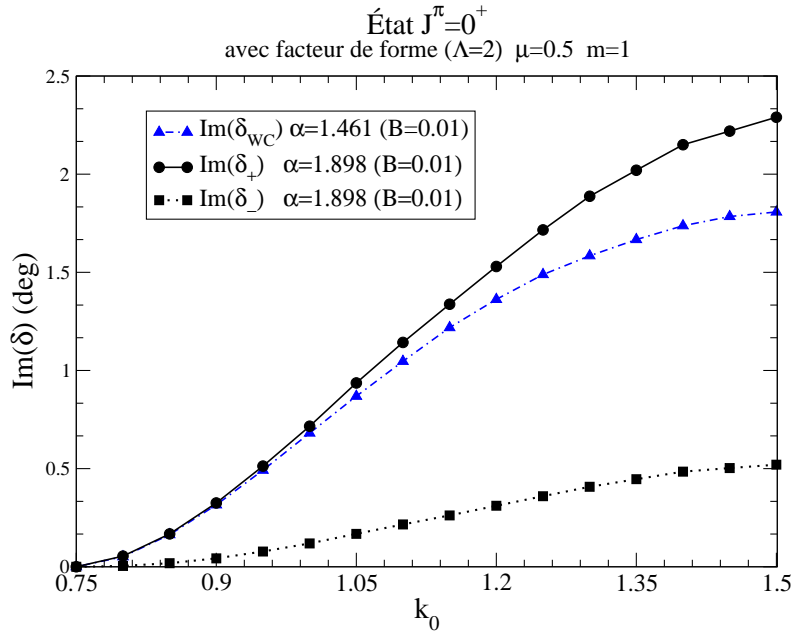


FIG. 5.15 – *Couplage scalaire : Comparaison des déphasages inélastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky, pour des systèmes possédant le même spectre. ($B = 0.01$, $\mu = 0.5$, $m = 1$).*

5.5.5 Quelques remarques sur la diffusion dans le cas du couplage pseudo-scalaire.

La situation du couplage pseudo-scalaire est plus délicate. Il n'est, en effet, plus possible de limiter le développement en ondes partielles à la seule première composante. Ceci, outre le désavantage d'allonger considérablement les calculs numériques, présente un problème plus fondamental. En effet, les déphasages δ_λ correspondant aux ondes partielles suivantes, que nous avons pu négliger dans le cas du couplage scalaire, car d'ordre très faible par rapport au déphasage δ_0 , sont maintenant de même ordre de grandeur. Ces nouveaux déphasages sont difficilement interprétables au point de vue physique.

Une méthode de résolution qui ne nécessite pas une décomposition angulaire est probablement plus adaptée. Ceci était déjà le cas pour le calcul des états liés, où la méthode de décomposition angulaire nécessitait de prendre en compte trois ondes partielles, ou plus, pour atteindre des précisions proches de celles obtenues par Mangin-Brinet. Cette dernière a effectué un calcul passant par une discrétisation sur une base de splines des dépendances en k et en θ des composantes relativistes $f_i(k, \theta)$.

5.6 Dernières remarques.

Dans ce chapitre, nous avons étudié un système de deux fermions, en interaction par un couplage soit scalaire, soit pseudo-scalaire, dans l'état $J^\pi = 0^+$. Les fonctions d'onde dans l'état $J^\pi = 0^+$ font intervenir deux structures de spin et les potentiels sont alors des quantités matricielles 2×2 . L'équation pour les états liés est alors un ensemble de deux équations couplant les deux composantes relativistes de la fonction d'onde. Les équations pour les états liés ont été décomposées sur une base de polynômes de Legendre, à partir d'une décomposition angulaire des composantes relativistes de la fonction d'onde. Nous avons effectué une discrétisation sur une base de splines, ce qui nous a permis d'obtenir une équation matricielle aux valeurs propres résolue par une méthode de canaux couplés.

Pour le couplage scalaire, nous avons constaté qu'une seule composante de ce développement est suffisante pour obtenir, avec une excellente précision, les énergies de liaison. Ce résultat coïncide avec ce que nous avons observé dans le cas des particules scalaires. De façon remarquable, le système avec un tel couplage peut être décrit avec une très bonne précision en approximant le potentiel par un potentiel «effectif» qui n'est que la moyenne sur toutes les directions du front de lumière \hat{n} du potentiel de départ. Nous avons observé que cette propriété est due à la prépondérance de la première composante relativiste de la fonction d'onde. La décomposition angulaire de cette première composante peut en effet se limiter au seul premier terme, tandis que la seconde composante doit être développée sur un nombre plus important de polynômes de Legendre.

Cette propriété de «moyenne» sur \hat{n} n'est, par contre, pas présente pour le couplage pseudo-scalaire. Dans ce cas, il faut au moins deux composantes du développement angulaire pour obtenir des énergies de liaison proches à quelques pourcents des valeurs stables. Dans le couplage scalaire, l'effet de moyenne se perd, d'une part, par l'importance de la deuxième composante relativiste, comparable à celle de la première composante relativiste de la fonction d'onde. L'effet de «moyenne» se perd, d'autre part, à cause de la présence des zéros dans la première composante relativiste. Nous observons, dans ce cas, que la

première composante du développement angulaire diminue son importance relative par rapport aux autres composantes du développement.

En outre, nous avons dérivé dans ce chapitre, en analogie avec le cas des particules scalaires, une équation pour les états de diffusion de moment angulaire $J^\pi = 0^+$. Il s'agit d'une équation matricielle inhomogène couplée 2×2 . Cette équation a été décomposée sur une base de polynômes de Legendre. Dans le cas du couplage scalaire, seule la première composante du développement angulaire suffit à décrire correctement le système. La résolution de l'équation pour la diffusion se traduit alors par l'obtention de quatre matrices \mathcal{K} solutions du système linéaire. Afin d'extraire des déphasages, nous avons diagonalisé ces quantités sur couche d'énergie : deux déphasages, notés δ_+ et δ_- sont donc calculés pour le couplage scalaire, cas où il est possible de limiter le développement angulaire à une seule composante. Le déphasage δ_+ est «sensible» à l'existence d'états liés et permet de calculer, par un développement aux petites valeurs de k_0 , l'énergie de liaison d'états faiblement liés. Notre traitement de la diffusion est donc cohérent avec le calcul des états liés. Le déphasage δ_- est plus faible que δ_+ , principalement aux petites valeurs de k_0 , et peu sensible à l'existence de configurations permettant un état lié.

Un fait remarquable des potentiels dérivés de la LFD est l'ouverture *automatique* d'un canal inélastique dès que l'énergie cinétique du système est plus grande que la masse du boson échangé. Ceci se traduit par l'apparition d'une composante imaginaire du potentiel, et donc, d'un déphasage imaginaire. Des tels déphasages sont présentés pour le couplage scalaire. Comme pour les déphasages réels, le déphasage δ_-'' est plus faible que le déphasage δ_+'' .

Conclusions.

Nous avons entrepris, dans cette thèse, l'étude des systèmes à deux corps avec une approche hamiltonienne relativiste de la théorie quantique des champs : le formalisme de la *dynamique sur le front de lumière*, ou LFD, dans une version explicitement covariante. Il s'agit de l'une des cinq approches hamiltoniennes équivalentes possibles qui respectent l'invariance de Poincaré. La dynamique sur le front de lumière possède plusieurs avantages par rapport à l'approche habituelle de *quantification à temps égaux*, comme la grande simplicité du vide ou les analogies de ce formalisme hamiltonien avec la mécanique quantique non-relativiste.

Le formalisme de la LFD est particulièrement adapté à l'étude des systèmes composites. Dans cette approche, le vecteur d'état est défini dans une surface tangente au cône de lumière. Dans notre approche covariante de la LFD, où cette surface n'est pas fixée, elle est paramétrisée par le quadri-vecteur de genre lumière $\omega = \omega_0(1, \hat{n})$. Le vecteur unitaire \hat{n} indique la direction du front de lumière. Le vecteur d'état est décomposé en composantes de Fock, chacune de ces composantes pouvant être interprétée comme une fonction d'onde. Ceci présente un certain nombre d'avantages par rapport aux équations de Bethe-Salpeter, le formalisme utilisé dans l'approche à temps égaux pour étudier les systèmes à quelques corps.

Dans ce travail, nous avons tout d'abord considéré les états liés du système à deux corps le plus simple. Il s'agit d'une extension du modèle de Wick-Cutkosky, dans lequel deux particules scalaires de masse m interagissent par l'échange d'une particule scalaire de masse μ , avec un noyau d'interaction obtenu à l'approximation *ladder*. Ce noyau, dans le cas de notre version explicitement covariante de la LFD, dépend de la direction du front de lumière \hat{n} . Notre objectif a été l'étude des états de diffusion dans ce modèle. Nous avons cependant commencé par l'étude des états liés de ce système.

Afin de résoudre les équations pour les états liés d'un système de moment cinétique total J quelconque, la fonction d'onde du système a été décomposée sur une base d'harmoniques sphériques. Les énergies de liaison et les fonctions d'onde ont été calculées pour $J = 0$ (l'onde S) et pour $J = 1$ (l'onde P). Dans ce dernier cas, la troncation de l'espace de Fock génère une brisure de la symétrie par rotation du système, et deux solutions non-physiques sont obtenues. Pour obtenir une solution respectant la symétrie par rotation, nous avons suivi une méthode proposée dans [13].

La décomposition angulaire de la fonction d'onde nous a permis d'observer une caractéristique très importante de ce modèle : les propriétés physiques sont décrites avec une excellente précision en se limitant au premier terme du développement angulaire, ce qui équivaut à effectuer les calculs avec un noyau effectif, obtenu comme la moyenne sur toutes les directions du front de lumière du noyau d'interaction.

Cette propriété ne se limite pas aux seuls noyaux calculés à l'approximation *ladder*.

Nous avons, en effet, étendu notre étude au-delà de cette approximation, en considérant les corrections dues à la self-énergie. Le calcul de la contribution de la self-énergie a été effectué en modifiant l'équation pour les états liés. Ceci a été réalisé en remplaçant les propagateurs libres par des propagateurs habillés. Le terme de self-énergie a été renormalisé.

Nous avons calculé l'effet de la contribution de la self-énergie sur les énergies de liaison. Nous retrouvons la même propriété observée dans l'approximation *ladder*, les observables physiques pouvant être calculées avec une très bonne précision avec le noyau «moyenné» sur \hat{n} . L'effet de la self-énergie a été calculé pour l'onde S et pour l'onde P . Cet effet est répulsif mais dépend fortement de la masse μ de la particule échangée. Nous avons montré, en particulier, que la self-énergie peut interdire la liaison pour des gammes d'énergie de liaison importantes. Cet effet est spectaculaire, en particulier pour l'onde P , où la contribution de la self-énergie interdit la liaison sauf pour des systèmes où la masse échangée est très faible. En ce qui concerne l'onde S , deux cas sont possibles : dans un premier cas, lorsque la masse échangée μ dépasse une valeur critique –qui a été calculée–, l'effet de la self-énergie est répulsif mais limité, la liaison étant possible pour toute la gamme «physique» d'énergies de liaison $B \in [0, 2m]$. Dans ce cas, le comportement physique du système est qualitativement comparable à celui obtenu à la seule approximation *ladder*.

Dans un deuxième cas, par contre, pour des valeurs de μ plus faibles, la liaison est interdite pour des valeurs de B importantes, et ce quelle que soit la valeur de la constante de couplage. Il existe alors une valeur maximale à l'énergie de liaison, correspondant à la valeur de l'énergie de liaison lorsque la constante de couplage tend vers l'infini. Le comportement physique du système est radicalement différent de celui observé à l'approximation *ladder*. L'effet de la self-énergie n'est pas une simple «correction».

Après l'étude des états liés dans le modèle de Wick-Cutkosky, nous avons abordé l'étude des processus de diffusion. En analogie avec le cas non-relativiste, nous avons dérivé, à partir de l'équation pour les états liés, une équation pour les états de diffusion. Cette équation a été résolue en effectuant une décomposition angulaire équivalente à celle réalisée pour les états liés, ce qui nous a permis d'obtenir les déphasages pour une onde partielle donnée. Le fait que la physique du système est décrite en considérant uniquement le premier terme du développement angulaire –l'effet de «moyenne»– a été retrouvé pour les déphasages et utilisé directement pour calculer les déphasages pour l'onde S et l'onde P . Ces déphasages ont tout d'abord été calculés à l'approximation *ladder*.

Pour l'onde S , ces déphasages élastiques sont très différents des déphasages non-relativistes pour une même constante de couplage. L'effet relativiste est répulsif, mais relié aux changements induits par le traitement relativiste sur le spectre des états liés, ce dernier étant très différent par rapport au cas non-relativiste. Nous avons donc préféré comparer nos résultats avec les déphasages non-relativistes en choisissant des constantes de couplages différentes conduisant à des systèmes possédant un même état lié. Dans ce cas, l'effet relativiste est plus faible, mais encore répulsif. Dans le cas de l'onde P , deux déphasages différents sont solutions des équations et traduisent la brisure de la symétrie par rotation induite par la troncation de l'espace de Fock. Un déphasage «physique» est calculé comme une moyenne pondérée entre les déphasages non-physiques.

Une propriété fondamentale des noyaux calculés dans le formalisme sur le front de lumière provient du fait qu'ils prennent automatiquement en compte l'ouverture d'un canal

inélastique correspondant à l'émission d'un boson échangé, et ce dès que l'énergie cinétique du système dépasse le seuil de création de cette particule. Cette propriété différencie à elle seule notre approche relativiste des approches non-relativistes. L'ouverture d'un tel canal se traduit par le fait que le noyau contient un pôle après le seuil inélastique, devenant alors complexe. La résolution de l'équation pour la diffusion nous a permis d'extraire un déphasage imaginaire.

Nous avons, cependant, observé que ces déphasages sont négatifs pour l'onde P , et violent donc l'unitarité de la matrice de diffusion S . Ce résultat est inhérent à l'approximation *ladder*. En effet, un calcul analytique perturbatif nous a permis de montrer que la violation de l'unitarité provient directement du fait d'avoir négligé la contribution des processus de self-énergie. L'ajout de la self-énergie permet donc de rétablir l'unitarité de la matrice S . Nous avons modifié l'équation de la diffusion pour prendre en compte cette contribution. Nous avons donc calculé des déphasages, tant élastiques comme inélastiques, avec prise en compte de la self-énergie.

Après l'étude de ce modèle scalaire, nous avons abordé le cas de deux fermions dans l'état $J^\pi = 0^+$, interagissant par des couplages scalaires ou pseudo-scalaires. Dans ce cas, la fonction d'onde possède deux composantes décrivant la structure de spin. Les noyaux à l'approximation *ladder* s'écrivent comme des matrices 2×2 et l'équation pour les états liés est alors une équation couplée pour les deux composantes relativistes. Nous avons corrigé ces noyaux par un facteur de forme semblable au facteur de forme dipolaire pour assurer la convergence des équations intégrales.

Afin de résoudre l'équation pour les états liés, nous avons effectué une décomposition angulaire des deux composantes relativistes. Les énergies de liaison ont été calculées, ce qui nous a permis de remarquer une différence importante entre le couplage scalaire et le couplage pseudo-scalaire. Pour le couplage scalaire, nous avons retrouvé le comportement observé dans le modèle de Wick-Cutkosky : la première composante du développement angulaire suffit à décrire correctement le système, et il suffit de calculer un potentiel effectif moyenné sur toutes les directions du front de lumière pour obtenir les énergies de liaison avec une bonne précision.

Cette propriété ne se retrouve pas, par contre, pour le couplage pseudo-scalaire. Dans ce cas, il est nécessaire de considérer deux ou trois composantes du développement angulaire pour décrire les observables physiques avec une bonne précision. Pour comprendre la différence de comportement entre ces deux couplages, nous avons comparé le comportement des deux composantes de spin pour les deux couplages. La différence de comportement vient, d'une part, de l'importance de la contribution de la deuxième composante relativiste dans le couplage pseudo-scalaire, et d'autre part, de l'existence de zéros dans la première composante relativiste pour ce couplage, comportement différent de celui observé pour le couplage scalaire.

Nous avons, par ailleurs, dérivé une équation pour la diffusion à partir de l'équation pour les états liés d'un système de moment angulaire et parité $J^\pi = 0^+$. Pour résoudre cette équation, nous avons encore effectué une décomposition angulaire. La propriété de «moyenne» sur \hat{n} observée pour le couplage scalaire nous a permis d'extraire des déphasages pour ce couplage. À cause de l'existence de deux composantes relativistes pour la fonction d'onde, la résolution de l'équation pour la diffusion conduit à deux déphasages relativistes. Ces deux déphasages ont des comportements différents. Le premier déphasage est sensible à l'existence d'un état lié ou à son voisinage, et permet d'obtenir l'énergie

de liaison, pour des systèmes faiblement liés, à partir de ses paramètres à basse énergie. Ce déphasage est, de plus, très sensible aux changements du paramètre Λ du facteur de forme. Le deuxième déphasage, par contre, est peu sensible aux changements de Λ ou à l'existence d'un état lié.

Par ailleurs, les noyaux pour les fermions ont le même dénominateur que celui du modèle de Wick-Cutkosky. Ils assurent donc l'ouverture automatique du canal inélastique correspondant au processus d'émission d'un boson échangé, dès que l'énergie cinétique du système dépasse la masse de cette particule. Deux déphasages inélastiques ont donc été calculés pour le couplage scalaire.

Le couplage pseudo-scalaire, par contre, ne peut pas être correctement décrit avec un potentiel effectif moyenné sur \hat{n} . L'obtention de déphasages est alors difficile. En effet, différentes quantités de même ordre sont obtenues pour les différents termes du développement angulaire, et sont difficilement interprétables comme des déphasages. L'une des suites possibles à ce travail de thèse consisterait à élaborer une méthode permettant d'obtenir les deux déphasages relativistes correspondant à ce couplage. De même, il est intéressant de calculer les déphasages correspondant aux couplages vectoriels ou pseudo-vectoriels.

Une autre suite possible est donnée par le calcul des états de diffusion pour les systèmes à $J^\pi = 1^+$. Dans ce cas, la brisure de l'invariance par rotation, induite par la troncation de l'espace de Fock, se traduit par l'existence de deux solutions états propres de l'opérateur \hat{A}^2 introduit dans le premier chapitre. La description de ces solutions passe, pour un cas, par l'existence de deux structures de spin, tandis que l'autre solution nécessite l'introduction de quatre structures de spin. Même lorsque le couplage choisi présente la propriété de pouvoir être «moyenné» sur \hat{n} , il faudra alors considérer six déphasages, ce qui peut rendre plus délicate l'obtention de déphasages «physiques» pour les états de moment angulaire non nul.

Une autre ouverture possible est de considérer la contribution de la self-énergie, qui est probablement nécessaire pour assurer l'unitarité de la matrice S . Un tel calcul est cependant plus délicat, en particulier du fait que le résultat dépend du couplage choisi. D'autres prolongements possibles sont de considérer les états à trois particules, ou de prendre en considération d'autres diagrammes, d'ordre supérieur, dans le calcul des noyaux.

Annexe I

Règles diagrammatiques de la LFD.

Quelques points importants différencient les règles diagrammatiques de la LFD des règles de Feynman habituelles. Ceci est dû principalement au fait que toutes les particules sont sur couche de masse (à cause du $\delta(p^2 - m^2)$). Le facteur $\frac{1}{\tau - i\epsilon}$ (venant de l'écriture sous forme intégrale des fonctions Θ) s'interprète comme le propagateur d'une particule fictive nommée *spurion* de moment $\omega\tau$.

La traduction d'un diagramme de Feynman d'ordre n se fera suivant les règles suivantes¹ :

I.1 Cas des systèmes à spin 0

Des lignes continues correspondent aux particules physiques. Des lignes droites discontinues correspondent aux *spurions*.

- i. On numérote arbitrairement les vertex du diagramme. On oriente les lignes continues –particules physiques de quadri-impulsion k_i – dans l'ordre croissant de la numérotation. Les particules initiales sont orientées dans le sens d'entrée, les particules finales dans le sens de sortie. On connecte tous les vertex par des lignes discontinues (*spurion*) orientées dans l'ordre décroissant. À chaque *spurion* j est associé le moment $\omega\tau_j$. L'ensemble de toutes les quadri-impulsions, y compris celles de *spurions*, obéit à la loi de conservation, i.e. leur somme totale est nulle.
- ii. Tous les diagrammes où des vertex ont toutes les lignes soit en entrée, soit en sortie (vertex du vide) sont omis ;
- iii. À chaque ligne continue interne de quadri-impulsion k est associé le propagateur $\Theta(\omega \cdot k_i) \delta(k_i^2 - m^2)$. À chaque ligne discontinue interne de quadri-impulsion $\omega\tau_j$ est associé le facteur $\frac{1}{\tau_j - i\epsilon}$
- iv. À chaque vertex est associé la constante de couplage g
- v. On intègre –avec $\frac{d^4 k_i}{(2\pi)^3}$ – sur toutes les quadri-impulsions de particules internes qui restent inchangées après la prise en compte des lois de conservation. On intègre –avec $d\tau_j$ (entre $-\infty$ et $+\infty$)– sur tous les *spurions*.
- vi. On répète la procédure pour tous les $n!$ combinaisons possibles.

1. Le détail de la dérivation des règles suivantes se trouve dans la section 2.2 de [12].

I.2 Cas des systèmes à spin $\frac{1}{2}$

- i. Les diagrammes de Feynman pour un ordre donné sont réécrits selon la procédure indiquée pour les particules scalaires. Les lignes correspondant à des antifermions sont doublées. De manière générale, les lignes sont orientées selon si elles rentrent (à gauche) ou sortent (à droite) du diagramme et non pas pour indiquer s'il s'agit de fermions ou d'antifermions.
- ii. Lorsque, dans un diagramme, il y a des lignes internes de fermions ou d'antifermions dont les extrémités sont directement connectées par un spurion, il faut ajouter un diagramme équivalent, dans lequel la ligne du spurion est effacée et où une croix est dessinée sur la ligne du fermion (ou antifermion). Cette ligne n'est pas orientée.
- iii. L'amplitude correspondante s'écrit de gauche à droite. Les facteurs correspondants s'écrivent en partant d'un fermion sortant (à droite) et en suivant en contre-sens la ligne fermionique. Pour les antifermions, on part de la gauche, suivant le sens de la double ligne de l'antifermion.
- iv. À chaque ligne continue interne d'impulsion k est associée un propagateur, qui est donné, pour un fermion par $(\not{k} + m)\theta(\omega \cdot k)\delta(k^2 - m^2)$ et pour un antifermion par $(m - \not{k})\theta(\omega \cdot k)\delta(k^2 - m^2)$. À chaque fermion marqué d'une croix est associé le facteur $\frac{-\not{\omega}\theta(\omega \cdot k)}{2\omega \cdots k}$, ainsi qu'un facteur $\frac{\not{\omega}\theta(\omega \cdot k)}{2\omega \cdots k}$ pour tout antifermion marqué d'une croix. À tout spurion d'impulsion $\omega\tau_j$ est associé le facteur $\frac{1}{\tau_j - i\epsilon}$.
- v. À chaque vertex est associé le facteur gV , où V dépend du type de couplage. Les règles de conservation des impulsions doivent être satisfaites dans chaque vertex.
- vi. À chaque fermion sortant d'impulsion p est associé le spineur $\bar{u}(p)$, à chaque fermion entrant le spineur $u(p)$. De même, on aura un spineur $v(p)$ pour tout antifermion sortant et $\bar{v}(p)$ pour tout antifermions entrant.
- vii. On intègre sur $\frac{d^4k}{(2\pi)^3}$ pour toute ligne interne non-fixée après prise en compte des lois de conservation, et sur $d\tau_j$ pour les spurions.
- viii. On répète la procédure pour tous les $n!$ combinaisons possibles.

Annexe II

Volume de l'espace de phases à trois corps

Calculons le volume de l'espace de phases à trois corps :

$$V_3 = (2\pi)^4 \int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_3}} \quad (\text{II.1})$$

Pour cela, faisons apparaître d'autres variables d'intégration :

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{(2\pi)^5} \int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p'_{12} - k'_3) dM'_{12} \delta(M'^2_{12} - p'^2_{12}) \delta^{(4)}(p'_{12} - k'_1 - k'_2) d^4 p'_{12} \frac{d^3 k'_1}{2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{2\varepsilon_{k'_3}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \int 2M'_{12} dM'_{12} \int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p'_{12} - k'_3) \frac{d^3 p'_{12}}{2\varepsilon_{p'_{12}}} \frac{d^3 k'_3}{2\varepsilon_{k'_3}} \int \delta^{(4)}(p'_{12} - k'_1 - k'_2) \frac{d^3 k'_1}{2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{2\varepsilon_{k'_2}} \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en écrivant $(M'^2_{12} - p'^2_{12}) = (M'^2_{12} - p'^2_{012} + \vec{p}'^2_{12})$ et en introduisant $\varepsilon_{p'_{12}} = \sqrt{M'^2_{12} + \vec{p}'^2_{12}}$. Faisons apparaître deux intégrales qui peuvent être calculées séparément

$$V_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int 2M'_{12} dM'_{12} V_2(1'2', 3') V_2(1', 2')$$

avec deux intégrales qu'il est possible de comparer au volume de l'espace de phases à deux corps :

$$\begin{aligned} V_2(1'2', 3') &= \int \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p'_{12} - k'_3) \frac{d^3 p'_{12}}{2\varepsilon_{p'_{12}}} \frac{d^3 k'_3}{2\varepsilon_{k'_3}} = \frac{\pi p_3}{M} \\ V_2(1', 2') &= \int \delta^{(4)}(p'_{12} - k'_1 - k'_2) \frac{d^3 k'_1}{2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{2\varepsilon_{k'_2}} = \frac{\pi p_1}{M'_{12}} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{M'^2_{12}}{4} - m^2} \\ p_3 &= \frac{1}{2M} \sqrt{[M^2 - (M'_{12} + \mu)^2][M^2 - (M'_{12} - \mu)^2]} \end{aligned}$$

Avec p_1 qui correspond à l'impulsion dans le centre de masse de deux particules dans l'état final, avec une masse effective M'_{12} . p_3 correspond à l'impulsion de la particule émise dans le référentiel du centre de masse. Nous avons une masse effective finale de deux particules 1' et 2' égale à M'_{12} . Elle vaut au maximum $M - \mu$ et au minimum $M'_{12} = (2m + \mu) - \mu = 2m$. Nous avons donc :

$$V_3 = \frac{1}{2^4 \pi^3 M} \int_{2m}^{M-\mu} p_1 p_3 dM'_{12} \quad (\text{II.2})$$

Nous nous trouvons ici dans le cas $M^2 = 4(k^2 + m^2)$, donc $M = 2\varepsilon_k$. Près du seuil k_s , nous avons un comportement $V_3 \propto (k - k_s)^2$.

Annexe III

Fonctions F_λ^μ

Deux des trois intégrations angulaires permettant de calculer $V_{\lambda\lambda'}^\mu$ sont analytiques. L'expression $\bar{V}_\mu(k, u, k', u')$ de l'intégration sur $\bar{\varphi}$ est donnée par (3.50). Reste à calculer :

$$V_{\lambda\lambda'}^\mu(k, k', M^2) = 2\pi\delta_{\mu\mu'}c_{\lambda\lambda\mu} \int du \int du' P_\lambda(u) \bar{V}_\mu(k, u, k', u') P_{\lambda'}(u')$$

L'intégration sur u' (ou indifféremment sur u) est analytique, l'expression de $\bar{V}_\mu(k, u, k', u')$ faisant apparaître soit des termes constants, soit des intégrales dont les primitives peuvent être connues analytiquement¹. Voici quelques expressions pour $\mu = 0$ et $\mu = 1$:

Lorsque $\mu = 0$:

Dans ce cas, nous aurons à calculer des intégrales du type suivant :

$$F_\lambda^0 = F_\lambda = \int \frac{P_{\lambda\mu}(u')}{\sqrt{\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma' - i\epsilon}} du'$$

Voici quelques expressions analytiques pour les premières valeurs de λ :

$$F_0 = \frac{\log(\frac{2u'\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{u'^2\alpha + u'\beta + \gamma})}{\sqrt{\alpha}}$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{u'^2\alpha + u'\beta + \gamma}}{\alpha} - \frac{\beta \log(\frac{2u'\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{u'^2\alpha + u'\beta + \gamma})}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_2 = \left(\frac{3u'}{4\alpha} - \frac{9\beta}{8\alpha^2} \right) \sqrt{u'^2\alpha + u'\beta + \gamma} - \frac{(8\alpha^2 - 9\beta^2 + 12\alpha\gamma) \log(\frac{2u'\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha}} + 2\sqrt{u'^2\alpha + u'\beta + \gamma})}{16\alpha^{\frac{5}{2}}}$$

1. Des logiciels de calcul formel, *e.g.* MATHEMATICA (www.wolfram.com) permettent d'obtenir facilement ces expressions.

$$\begin{aligned}
F_3 &= \frac{\sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{5 u'^2}{3 \alpha} - \frac{25 u' \beta}{12 \alpha^2} - \frac{72 \alpha^2 - 75 \beta^2 + 80 \alpha \gamma}{24 \alpha^3} \right)}{2} \\
&\quad + \frac{\beta (24 \alpha^2 - 25 \beta^2 + 60 \alpha \gamma) \log\left(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}\right)}{32 \alpha^{\frac{7}{2}}} \\
F_4 &= \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{35 u'^3}{32 \alpha} - \frac{245 u'^2 \beta}{192 \alpha^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{5 u' (288 \alpha^2 - 245 \beta^2 + 252 \alpha \gamma)}{768 \alpha^3} + \frac{5 \beta (864 \alpha^2 - 735 \beta^2 + 1540 \alpha \gamma)}{1536 \alpha^4} \right) \\
&\quad + \frac{1}{1024 \alpha^{\frac{9}{2}}} \left\{ (384 \alpha^4 - 1440 \alpha^2 \beta^2 + 1225 \beta^4 + 1920 \alpha^3 \gamma \right. \\
&\quad \left. - 4200 \alpha \beta^2 \gamma + 1680 \alpha^2 \gamma^2) \log\left(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}\right) \right\} \\
F_5 &= \frac{1}{8} \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{63 u'^4}{5 \alpha} - \frac{567 u'^3 \beta}{40 \alpha^2} - \frac{7 u'^2 (800 \alpha^2 - 567 \beta^2 + 576 \alpha \gamma)}{240 \alpha^3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{7 u' \beta (4000 \alpha^2 - 2835 \beta^2 + 5796 \alpha \gamma)}{960 \alpha^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{28800 \alpha^4 - 84000 \alpha^2 \beta^2 + 59535 \beta^4 + 89600 \alpha^3 \gamma - 185220 \alpha \beta^2 \gamma + 64512 \alpha^2 \gamma^2}{1920 \alpha^5} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2048 \alpha^{\frac{11}{2}}} \left\{ \beta (1920 \alpha^4 - 5600 \alpha^2 \beta^2 + 3969 \beta^4 + 13440 \alpha^3 \gamma - 17640 \alpha \beta^2 \gamma \right. \\
&\quad \left. + 15120 \alpha^2 \gamma^2) \log\left(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Lorsque $\mu = 1$:

Lorsque $\mu = 1$, nous aurons deux termes à intégrer sur u' :

$$\int du' \frac{1}{B} (-4\pi\alpha) P_{\lambda 1}(u') du' - \int du' \frac{A \bar{V}_0}{B} P_{\lambda 1}(u') du'$$

Nous noterons le premier $F_{\lambda}^{c,1}$. Il n'est que l'intégration d'un polynôme, car la dépendance en $\sqrt{1 - u'^2}$ de B disparaît avec les $P_{\lambda 1}(u')$, où elle peut être factorisée. Reste le second terme, noté F_{λ}^1 . En écrivant $A = X + u'Y$ nous aurons à calculer :

$$F_{\lambda}^1 = \int du' \frac{X + u'Y}{\sqrt{\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma - i\epsilon}} \frac{P_{\lambda 1}(u')}{\sqrt{1 - u'^2}} du'$$

Voici les expressions analytiques de ce terme pour les premières valeurs de λ :

$$F_0^1 = 0$$

$$\begin{aligned}
F_1^1 &= - \left(\frac{Y \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}}{\alpha} \right) - \frac{(2 X \alpha - Y \beta) \log(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma})}{2 \alpha^{\frac{3}{2}}} \\
F_2^1 &= -3 \left(\left(\frac{u' Y}{2 \alpha} + \frac{4 X \alpha - 3 Y \beta}{4 \alpha^2} \right) \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(4 X \alpha \beta - 3 Y \beta^2 + 4 Y \alpha \gamma) \log(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma})}{8 \alpha^{\frac{5}{2}}} \right) \\
F_3^1 &= \frac{-3}{2} \left\{ \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{5 u'^2 Y}{3 \alpha} + \frac{5 u' (6 X \alpha - 5 Y \beta)}{12 \alpha^2} \right. \right. \\
&\quad \left. - \frac{24 Y \alpha^2 + 90 X \alpha \beta - 75 Y \beta^2 + 80 Y \alpha \gamma}{24 \alpha^3} \right) \\
&\quad - \frac{1}{16 \alpha^{\frac{7}{2}}} \left[(16 X \alpha^3 - 8 Y \alpha^2 \beta - 30 X \alpha \beta^2 + 25 Y \beta^3 + \right. \\
&\quad \left. 40 X \alpha^2 \gamma - 60 Y \alpha \beta \gamma) \log(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}) \right] \Big\} \\
F_4^1 &= \frac{-5}{2} \left\{ \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{7 u'^3 Y}{4 \alpha} + \frac{7 u'^2 (8 X \alpha - 7 Y \beta)}{24 \alpha^2} \right. \right. \\
&\quad - \frac{u' (144 Y \alpha^2 + 280 X \alpha \beta - 245 Y \beta^2 + 252 Y \alpha \gamma)}{96 \alpha^3} \\
&\quad - \frac{576 X \alpha^3 - 432 Y \alpha^2 \beta - 840 X \alpha \beta^2 + 735 Y \beta^3 + 896 X \alpha^2 \gamma - 1540 Y \alpha \beta \gamma}{192 \alpha^4} \Big\} \\
&\quad + \frac{1}{128 \alpha^{\frac{9}{2}}} \left[(192 X \alpha^3 \beta - 144 Y \alpha^2 \beta^2 - 280 X \alpha \beta^3 + 245 Y \beta^4 + 192 Y \alpha^3 \gamma \right. \\
&\quad \left. + 672 X \alpha^2 \beta \gamma - 840 Y \alpha \beta^2 \gamma + 336 Y \alpha^2 \gamma^2) \log(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}) \right] \Big\} \\
F_5^1 &= \frac{-15}{8} \left\{ \left(\sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma} \left(\frac{21 u'^4 Y}{5 \alpha} + \frac{21 u'^3 (10 X \alpha - 9 Y \beta)}{40 \alpha^2} \right. \right. \right. \\
&\quad - \frac{7 u'^2 (160 Y \alpha^2 + 210 X \alpha \beta - 189 Y \beta^2 + 192 Y \alpha \gamma)}{240 \alpha^3} \\
&\quad - \frac{7 u' (960 X \alpha^3 - 800 Y \alpha^2 \beta - 1050 X \alpha \beta^2 + 945 Y \beta^3 + 1080 X \alpha^2 \gamma - 1932 Y \alpha \beta \gamma)}{960 \alpha^4} \\
&\quad + \frac{1}{1920 \alpha^5} (1920 Y \alpha^4 + 20160 X \alpha^3 \beta - 16800 Y \alpha^2 \beta^2 - 22050 X \alpha \beta^3 + 19845 Y \beta^4 \\
&\quad + 17920 Y \alpha^3 \gamma + 46200 X \alpha^2 \beta \gamma - 61740 Y \alpha \beta^2 \gamma + 21504 Y \alpha^2 \gamma^2) \Big) \\
&\quad + \frac{1}{256 \alpha^{\frac{11}{2}}} \left[(256 X \alpha^5 - 128 Y \alpha^4 \beta - 1344 X \alpha^3 \beta^2 + 1120 Y \alpha^2 \beta^3 + 1470 X \alpha \beta^4 \right. \\
&\quad - 1323 Y \beta^5 + 1792 X \alpha^4 \gamma - 2688 Y \alpha^3 \beta \gamma - 5040 X \alpha^2 \beta^2 \gamma + 5880 Y \alpha \beta^3 \gamma \\
&\quad \left. \left. + 2016 X \alpha^3 \gamma^2 - 5040 Y \alpha^2 \beta \gamma^2) \log(\frac{2 u' \alpha + \beta}{\sqrt{\alpha}} + 2 \sqrt{u'^2 \alpha + u' \beta + \gamma}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Annexe IV

Déphasage inélastique à partir de la condition d'unitarité de la matrice S .

Nous voulons trouver un lien entre le déphasage inélastique et l'amplitude à trois corps \mathcal{F} . Nous reproduisons ici le calcul effectué par V. Karmanov [48] :

IV.1 Lien entre l'amplitude \mathcal{F} et le déphasage.

Nous partons des équations (2.54) et (2.55) de [12] :

$$\begin{aligned} S_{nm} &= 1 + iT_{nm} \\ &= 1 + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_{i=1}^m k_i - \sum_{i=1}^n k'_i) \frac{\mathcal{F}_{nm}}{\left((2\pi)^{32\varepsilon_{k'_1}} \dots (2\pi)^{32\varepsilon_{k'_n}} (2\pi)^{32\varepsilon_{k_1}} \dots (2\pi)^{32\varepsilon_{k_m}} \right)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

La section efficace du processus $1 + 2 \rightarrow 3 + \dots + n$ s'exprime par :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4j\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2}} |\mathcal{F}|^2 \frac{d^3k_3}{(2\pi)^{32\varepsilon_{k_3}}} \dots \frac{d^3k_n}{(2\pi)^{32\varepsilon_{k_n}}} \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k_3 - \dots - k_n), \quad (2.55)$$

où j est la densité du flux de particules incidentes :

$$j\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2} = \frac{1}{2} [s - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [s - (m_1 - m_2)^2]^{1/2} = 2k\varepsilon_k.$$

La matrice S étant unitaire $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$, la matrice T doit vérifier la condition d'unitarité :

$$T - T^\dagger = iT^\dagger T.$$

et donc :

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}^\dagger = 2Im\mathcal{F} = \int |\mathcal{F}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^{32\varepsilon_{k'_1}}} \frac{d^3k'_2}{(2\pi)^{32\varepsilon_{k'_2}}} \quad (IV.1)$$

ou bien :

$$Im\mathcal{F} = \frac{k}{64\pi^2\varepsilon_k} \int |\mathcal{F}|^2 d\Omega \quad (IV.2)$$

Ce qui permet d'obtenir, à partir de (2.55) et en remarquant que

$$4j\varepsilon_{k_1}\varepsilon_{k_2} = 2(s - 4m^2)^{1/2}s^{1/2} = 8k\varepsilon_k$$

la relation :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2^8\pi^2\varepsilon_k^2}|\mathcal{F}|^2 \quad (\text{IV.3})$$

Pour une onde partielle donnée, nous aurons :

$$Im\mathcal{F} = \frac{k}{16\pi\varepsilon_k}|\mathcal{F}|^2 \quad (\text{IV.4})$$

Nous cherchons une expression comparable à l'amplitude non relativiste, donc nous cherchons des solutions de la forme :

$$\mathcal{F} = -ih(\exp(2i\delta) - 1) = 2h \exp(i\delta) \sin \delta$$

ce qui impose $h = \frac{8\pi\varepsilon_k}{k}$. L'amplitude \mathcal{F} pour une onde partielle est donc reliée au déphasage par la relation :

$$\boxed{\mathcal{F} = 16\pi\varepsilon_k \frac{\exp(2i\delta) - 1}{2ik} = 16\pi\varepsilon_k f(k)} \quad (\text{IV.5})$$

où $f(k)$ a l'expression habituelle de l'amplitude non relativiste :

$$f(k) = \frac{S - 1}{2ik} = \frac{\exp(2i\delta) - 1}{2ik} \quad (\text{IV.6})$$

IV.2 Cas d'un canal inélastique.

L'équation (IV.1) peut être généralisée au cas des processus inélastiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2 \rightarrow 2} - \mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}^\dagger &= 2Im(\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}) = \int |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \\ &+ \int |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_3}} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

Maintenant utilisons l'équation (2.55) pour écrire :

$$\sigma^{inel} = \frac{1}{8k\varepsilon_k} \int |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 3}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2 - k'_3) \frac{d^3 k'_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_1}} \frac{d^3 k'_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_2}} \frac{d^3 k'_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{k'_3}} \quad (\text{IV.8})$$

La contribution élastique à la section efficace étant donnée par (IV.2), nous avons :

$$Im(\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}) = \frac{k}{64\pi^2\varepsilon_k} \int |\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}|^2 d\Omega + 4k\varepsilon_k \sigma^{inel} \quad (\text{IV.9})$$

or le premier terme est égal à $4k\varepsilon_k \sigma^{el}$, d'où :

$$Im(\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2}) = 4k\varepsilon_k (\sigma^{el} + \sigma^{inel}).$$

On introduit le déphasage complexe $\delta = \delta' + i\delta''$. L'équation (IV.5) aura pour expression :

$$\mathcal{F}_{2 \rightarrow 2} = 16\pi\varepsilon_k \frac{\exp(2i\delta' - 2\delta'') - 1}{2ik}$$

d'où :

$$1 - \exp(-4\delta'') = \frac{k^2}{\pi} \sigma^{inel} \quad (\text{IV.10})$$

dont l'expression pour les petites valeurs de δ'' –près du seuil, par exemple– est donnée par :

$$\delta'' = \frac{k^2}{4\pi} \sigma^{inel} \quad (\text{IV.11})$$

Annexe V

Formulaire : matrices de Pauli, spineurs, etc.

Matrices γ

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{-i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

Elles obéissent à la relation de commutation et d'anticommutation :

- $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu = \frac{i}{2}\sigma_{\mu\nu}$
- $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$

ainsi qu'aux relations de conjugaison hermitique :

$$\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger \quad \gamma_0\gamma_5\gamma_0 = -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5$$

Matrice de conjugaison de charge.

- Elle est définie par $U_c = \gamma_2\gamma_0$
- Son conjugué : $U_c^\dagger = \gamma_0^\dagger\gamma_2^\dagger = \gamma_0\gamma_2^\dagger = -\gamma_0\gamma_2 = \gamma_2\gamma_0 = U_c$
- C'est une matrice unitaire :
 - $U_c U_c^\dagger = U_c^2 = 1$
 - $U_c^{-1} = U_c^\dagger = U_c$
- De façon générale $U_c\gamma_\mu U_c^{-1} = -\gamma_\mu^\dagger = -{}^t\gamma_\mu$
 - $U_c\gamma_0 = -\gamma_0 U_c$
 - $U_c\gamma_\mu = -{}^t\gamma_\mu U_c$
 - $U_c \not{k} = -{}^t \not{k} U_c$

Annexe VI

Détails sur les méthodes numériques

VI.1 Résolution par la méthode des *splines*

La méthode des splines [49] est une méthode d'interpolation très utilisée en physique. Nous ne détaillerons pas ici cette méthode mais nous limiterons à l'illustrer par un exemple simple.

VI.1.1 Splines cubiques ou d'interpolation d'Hermite.

Les splines choisies ici sont des fonctions polynomiales cubiques à support borné. Elles sont données, pour un intervalle $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ par :

$$S_{2i}(x) = \begin{cases} 3 \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \right)^2 - 2 \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \right)^3 & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 3 \left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^3 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$
$$S_{2i+1}(x) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1}) \left[- \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \right)^2 + \left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \right)^3 \right] & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x_i) \left[\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 - \left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^3 \right] & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Ces fonctions sont nulles partout ailleurs.

VI.1.2 Résolution d'une équation intégrale à une dimension.

Détaillons cette discrétisation pour la résolution d'une équation intégrale à une dimension de la forme :

$$f(x) = \int_0^{x_{max}} dx' V(x, x') f(x') \quad (\text{VI.1})$$

La démarche générale consiste à décomposer la fonction $f(x)$ sur une base discrète de fonctions de spline :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} c_i S_i(x)$$

avec les coefficients c_i étant définis par :

$$c_{2i} = f(x_i) \quad ; \quad c_{2i+1} = f'(x_i) = \frac{df}{dx}(x_i)$$

Il est demandé alors que l'équation (VI.1) soit vérifiée pour un ensemble de points nommés *points de collocation* et notés \bar{x}_i .

$$c_j S_j(\bar{x}_i) = \int dx' V(\bar{x}_i, x') c_j S_j(x')$$

Reste à résoudre numériquement l'intégration sur x . Pour cela, le domaine d'intégration est divisé en N sous-intervalles, ce qui définit une *grille* $\{x_0, \dots, x_N\}$. Cette grille n'est pas nécessairement régulière, elle est souvent utile de fixer un nombre de points importants dans la région où l'intégrand est le moins régulier. Ceci peut être fait en définissant un *accélérateur*. L'intégration sur x peut-être faite selon les techniques habituelles d'intégration numérique (méthode de Gauss, des trapèzes, etc.). L'équation sera alors donnée par :

$$c_j S_j(\bar{x}_i) = \sum_k w_k V(\bar{x}_i, x'_k) c_j S_j(x'_k)$$

où w_k correspond au poids associé à l'intégration.

En posant :

$$A_{ij} = S_j(\bar{x}_i) \quad ; \quad B_{ij} = \sum_k w_k V(\bar{x}_i, x'_k) S_j(x'_k)$$

L'équation (VI.1) peut maintenant être écrite sous une forme matricielle :

$$A_{ij} c_j = \Lambda B_{ij} c_j$$

Il s'agit d'une équation aux valeurs propres. Pour obtenir les solutions de (VI.1), il suffit d'obtenir une valeur propre $\Lambda = 1$

Il est souvent utile de définir les points de collocation à partir de la grille d'intégration. Habituellement, nous choisissons deux points de collocation par intervalle de la grille.

VI.1.3 Détails sur la programmation.

Tous nos programmes ont été écrits en FORTRAN90. Ce langage a été choisi car un grand nombre de bibliothèques scientifiques sont écrites en FORTRAN77, FORTRAN90, etc. Nous utilisons pour nos calculs les bibliothèques scientifiques de la NAG (*Numerical Algorithms Group*)

Par ailleurs, afin de raccourcir le temps de calcul, nos programmes ont été conçus pour pouvoir être exécutés dans des calculateurs massivement parallèles. Ceci a été fait en utilisant le langage MPI. Nous avons effectué la plus grande partie de nos calculs dans les calculateurs scalaires de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS), centre de calcul du CNRS se trouvant à Orsay.

VI.1.4 Différentes grilles. Paramètres du calcul.

Grille de collocation.

Nous utilisons usuellement des grilles à deux domaines. Un premier domaine avec un nombre de points élevé permettant de décrire correctement la fonction d'onde ou la

fonction de vertex dans la partie proche de l'origine, où elle est plus changeante. Le deuxième domaine compte avec un nombre de points plus restreint, permettant de décrire correctement la queue de la fonction d'onde -ou la fonction de vertex.

Une grille est paramétrée par $N + 1$ points, un intervalle $[k_0, k_N]$ et un accélérateur a . Ce dernier paramètre est un réel compris entre 1 et 1.5 qui permet de déterminer la repartition des points selon la procédure suivante :

- Lorsque $a = 1$: Tous les points sont séparés d'un pas $\Delta = \frac{k_N - k_0}{N}$
- Lorsque $a > 1$:
 - i. Le premier point est placé en k_0
 - ii. Le point suivant est séparé du dernier d'un pas $\Delta = (k_N - k_0) \frac{a-1}{a^N - 1}$
 - iii. Le pas Δ est changé par $\Delta' = a\Delta$
 - iv. Le processus est itérée jusqu'au placement du dernier point, qui correspond bien à k_N

VI.1.5 Paramètres des intégrations numériques.

L'intégration sur k' est effectué par une méthode de Gauss fournie dans la bibliothèque NAG. Cette intégration est paramétrée par un entier N_g correspondant au nombre de points d'intégration.

L'intégration angulaire sur θ est effectuée selon la méthode des trapèzes. Elle est paramétrée par l'entier N_θ

VI.1.6 Paramètres pour le calcul des états liés.

B	μ	α	k_1	N_1	a_1	k_{max}	N_2	a_2	N_g	N_θ
0.01	0.15	0.581449	1.5	15	1.25	5.0	10	1.0	24	64
	0.5	1.46093	3.0	15	1.25	10.0	10	1.0	24	64
	1	2.98300	5.0	15	1.20	15.0	10	1.0	24	64
1	0.15	5.80092	7.0	15	1.15	20.0	10	1.0	24	64

TAB. VI.1 – *Modèle de Wick-Cutkosky : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison. La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.*

B	μ	α	k_1	N_1	a_1	k_{max}	N_2	a_2	N_g	N_θ
0.1	0.15	1.72089	1.75	15	1.10	8.0	10	1.15	24	64
	0.5	3.70767	2.0	15	1.10	8.0	10	1.10	24	64
	1	11.3947	2.0	15	1.10	8.0	10	1.15	24	64

TAB. VI.2 – *Cas des fermions, couplage scalaire : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison (avec FF ($\Lambda = 2$)). La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.*

B	μ	α	k_1	N_1	a_1	k_{max}	N_2	a_2	N_g	N_θ
0.1	0.15	1164.03	1.0	15	1.1	4.0	10	1.10	24	64
	0.5	910.962	1.0	15	1.1	4.0	10	1.10	24	64
	1	4653.70	2.0	15	1.10	6.0	10	1.10	24	64

TAB. VI.3 – *Cas des fermions, couplage pseudo-scalaire : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison. La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.*

Liste des tableaux

3.1	Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes dans le cas de l'onde S	76
3.2	Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas d'un état S , pour un calcul limité à trois ondes partielles.	78
3.3	Onde P : Valeur de α en fonction du nombre d'ondes partielles pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes	80
3.4	Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas de l'onde P , pour un calcul limité à trois ondes partielles.	83
3.5	Convergence ondes S et P : Écart $\Delta = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3}$ entre la constante de couplage calculée avec une seule onde partielle et trois ondes partielles.	85
3.6	Self-énergie : Calcul de la valeur de α pour différentes énergies de liaison et masses échangées μ , en fonction du nombre de composantes prises en compte. (Onde S).	96
3.7	Self-énergie : Contribution de chaque onde partielle à la normalisation de la fonction de vertex, dans le cas d'un état S , pour un calcul limité à trois ondes partielles	96
3.8	Onde S : Constantes de couplages (calcul à une composante) en fonction des énergies de liaison pour une masse d'échange nulle $\mu = 0$, dans l'approximation <i>ladder</i> . Comparaison avec les résultats de Mangin-Brinet.	97
3.9	Self-énergie : Énergie de liaison en fonction de α (calcul à une composante) pour une masse d'échange nulle $\mu = 0$, pour l'onde S . Comparaison avec les résultats de Ji : (1) correspond à un calcul numérique obtenu par une approche variationnelle. (2) correspond à un calcul analytique approché. (Ces données sont extraites de l'article cité.)	97
3.10	Self-Energie pour l'onde P : Plus petite valeur propre réelle positive Λ obtenue lors de la résolution numérique, pour $B = 0$. Une solution existe lorsque la valeur propre est égale à 1.	103
4.1	Onde S : Déphasages réels (en degrés) en fonction du nombre d'ondes partielles prises en compte, en dessous du seuil inélastique (ici $k_s = 0.75$) ($\mu = 0.5$ $\alpha = 1$)	124
4.2	Onde P_0 : Déphasages réels (en degrés) en fonction du nombre d'ondes partielles prises en compte, en dessous du seuil inélastique (ici $k_s = 0.75$) ($\mu = 0.5$ $\alpha = 1$)	130

5.1	Couplage scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes , avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).	176
5.2	Couplage scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α par un calcul complet à un canal (potentiel $V_{i,j;\lambda=0,\lambda'=0}$) et un calcul en réduisant le potentiel au seul terme $V_{i=1,j=1;\lambda=0,\lambda'=0}$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).	178
5.3	Couplage pseudo-scalaire pour l'état 0^+ : Calcul de α en fonction du nombre de composantes prises en compte, pour des énergies de liaison B et masses d'échange μ différentes , avec un facteur de forme ($\Lambda = 1.3, n = 1$).	180
5.4	Couplage scalaire : Calcul des énergies de liaison à partir des paramètres à basse énergie des déphasages. Les déphasages sont calculés avec un facteur de forme ($\Lambda = 2, n = 1$).	189
VI.1	Modèle de Wick-Cutkosky : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison. La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.	xvii
VI.2	Cas des fermions, couplage scalaire : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison (avec FF ($\Lambda = 2$)). La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.	xviii
VI.3	Cas des fermions, couplage pseudo-scalaire : Quelques paramètres du calcul des états liés pour quelques énergies de liaison. La valeur de α correspond au calcul à un canal. Tous les chiffres donnés ne correspondent pas forcément à la précision réelle du calcul mais sont donnés pour d'éventuelles comparaisons.	xviii

Table des figures

1.1	Représentation des surfaces correspondant aux trois formes dynamiques trouvées par Dirac dans son article fondateur de 1949.	7
1.2	Surfaces délimitant le volume d'intégration dans la théorie standard et dans la LFD.	12
1.3	Vertex de vide.	24
2.1	Introduction d'un facteur de forme	42
2.2	Couplage scalaire	43
2.3	Couplage entre deux fermions	44
3.1	Vertex d'interaction dans le modèle de Wick-Cutkosky	50
3.2	Équation pour la fonction d'onde à deux corps.	50
3.3	Approximation <i>ladder</i>	51
3.4	Noyau de l'interaction dans la <i>ladder approximation</i>	55
3.5	Choix des axes. Notons $\bar{\varphi} = \varphi - \varphi'$	57
3.6	Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici nous montrons, pour $\lambda = \lambda' = 0$, trois images à $k = 1$ fixé et trois valeurs de k' différentes.	67
3.7	Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici nous fixons $k = k' = 1$, λ et λ' prenant des valeurs différentes.	68
3.8	Image (en courbes de niveaux) de l'intégrand $P_\lambda(\cos \theta) \bar{V}_0(k, \theta, k', \theta') P_{\lambda'}(\cos \theta')$ dans le plan (θ, θ') . Ici, nous montrons un cas dissymétrique en k, k', λ, λ'	69
3.9	Domaines (+) et (−) correspondant au signe de $\left(\frac{k'u'}{\varepsilon_{k'}} - \frac{ku}{\varepsilon_k}\right)$	72
3.10	Onde S . Dépendance en θ de la fonction de vertex (calcul limité à trois ondes partielles). Le facteur $c_\lambda = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{2}}$ vient de la décomposition angulaire choisie.	77
3.11	Module de la fonction de vertex pour l'état S . Contribution des ondes partielles	79
3.12	Module de la fonction de vertex pour l'onde P ($\mu = 0.5, B = 0.1$). Contribution des trois premières ondes partielles : Γ_1 (en noir), Γ_3 (en rouge) et Γ_5 (en bleu)	82
3.13	Onde P : On trouve deux solutions non physiques. La masse physique est obtenue par la relation $M^2 = c_0^2 M_0^2 + c_1^2 M_1^2$	84
3.14	Diagrammes élémentaires à l'ordre le plus bas correspondant à l'approximation <i>ladder</i> (gauche) et à la self-énergie (droite)	87

3.15	Diagramme représentant le propagateur G_0 (encadré). p est l'impulsion totale du système.	88
3.16	Diagramme représentant $G_0(-\Sigma_1)G_0$	89
3.17	Self-énergie : diagramme correspondant à $-\Sigma(p^2)$. p est l'impulsion totale.	89
3.18	Fonction $\zeta(k', u')$ pour différentes valeurs de μ et M^2 , pour $\alpha = 1$. $k' \in \{0, 10\}$ et $u' \in \{-1, 1\}$	93
3.19	Effet de la prise en compte de la self-énergie dans les énergies de liaison en fonction de α . (Avec self-énergie en rouge)	99
3.20	Effet de la prise en compte de la self-énergie pour les faibles énergies de liaison. En noir $\mu = 0.15$, en rouge $\mu = 0.5$. La ligne pointillée correspond au cas non relativiste, la ligne continue au calcul relativiste dans la LFD, la ligne hachurée à la prise en compte de la self-énergie.	100
3.21	Self-Energie : Énergie de liaison en fonction de la constante de couplage, à l'approximation <i>ladder</i> (en noir) et avec prise en compte de la self-énergie (en rouge). Dans ce dernier cas, il existe une valeur limite pour l'énergie de liaison.	101
3.22	Self-Energie : Évolution de l'énergie de liaison maximale B_{lim} en fonction de μ	102
3.23	Self-Energie : Évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage lorsque $\mu = 1$	102
3.24	Self-Energie : Effet répulsif du terme contenant la self-énergie et évolution en fonction du paramètre η (sans SE si $\eta = 0$, avec SE si $\eta = 1$) pour $\mu = 0.15$ pour l'onde P	104
	Noyau de l'interaction dans la <i>ladder approximation</i>	114
4.1	Intégrand $P_\lambda(\cos\theta)\bar{V}_0(k, \theta, k', \theta')P_{\lambda'}(\cos\theta')$ pour $\alpha = 1$, $\mu = 0.25$ et $k = k' = 0.1$. L'image à 3D correspond à la seule partie réelle. Dans l'image à 2D, la partie réelle et la partie imaginaire sont représentées (c'est possible car elles ne se superposent jamais.).	117
4.2	Matrice $\mathcal{K}(k, k_0)$ pour $k_0 = 2$. Choix de grille ($\alpha = 1$, $\mu = 0.5$)	122
4.3	Potentiel $V_{00}(k, k')$ après intégrations angulaires. Ici, $\alpha = 1$, $\mu = 0.5$	123
4.4	Onde S : Déphasages correspondant au calcul à une composante, ainsi qu'au calcul à deux composantes ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).	125
4.5	Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$. Ici, le système non-relativiste a un état lié, à la différence du cas non relativiste.	126
4.6	Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.25$. Dans les deux, nous sommes en présence d'un état lié.	126
4.7	Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en noir) et non relativistes (en rouge) pour des systèmes ayant le même spectre ($B = 0.01$) avec $\mu = 0.5$	128
4.8	Onde S : Mêmes déphasages présentés aux graphes précédents ($B = 0.001$) à la même échelle	129

4.9	Onde S : Comparaison des déphasages relativistes (en lignes continues) et non relativistes (en traits discontinus) pour des systèmes ayant le même spectre : $B = 0.001$ (en noir), $B = 0.01$ (en rouge) et $B = 0.1$ (en bleu), avec $\mu = 0.5$	130
4.10	Onde S : Comparaison du déphasage obtenu par modèle de Wick-Cutkosky et par un calcul non relativiste pour des systèmes non liés. Nous avons fixé une même valeur de a ($a = -1.65$).	131
4.11	Onde P : Déphasages pour les ondes P_0 et P_1 (en noir) ainsi que déphasage «physique» (en rouge) avant le seuil, à l'approximation <i>ladder</i> ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). En encadré, le déphasage correspondant à l'onde S pour ces mêmes paramètres.	132
4.12	Onde P : Comparaison des déphasages «physiques» et «non-physiques», lorsque les deux solutions non-physiques correspondent à un système ayant un état lié ($\alpha = 10$ et $\mu = 0.5$).	133
4.13	Onde P : Comparaison des déphasages «physiques» et «non-physiques», lorsque une solution non-physique correspond à un système ayant un état lié et l'autre non. ($\alpha = 7$ et $\mu = 0.5$).	134
4.14	Onde P : Comparaison des déphasages non-relativistes et relativistes (solutions non-physiques et solution physique), avant le seuil, à l'approximation <i>ladder</i> ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).	134
4.15	Comparaison entre les sections efficaces correspondantes à l'onde S et l'onde $P_{phys.}$ ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$).	135
4.16	Onde S : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya [38]. Les déphasages de ces derniers sont pris de la figure 1 de leur article, en respectant leurs notations. Nous avons $\beta = 0.1$ (en noir), $\beta = 0.3$ (en rouge) et $\beta = 0.7$ (en bleu). Pour rappel, $\beta = \frac{\alpha}{\pi}$. En vert, nos résultats. Tous les calculs sont fait avec $\mu = m = 1$	137
4.17	Onde S : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya [38]. Les déphasages de ces derniers sont pris de la figure 2 de leur article, en respectant leurs notations. Nous avons $\beta = 1$ (en noir), $\beta = 5$ (en rouge) et $\beta = 10$ (en bleu). Pour rappel, $\beta = \frac{\alpha}{\pi}$. En vert, nos résultats. Tous les calculs sont fait avec $\mu = m = 1$	138
4.18	Onde S : Énergie de liaison de l'état lié en fonction de la constante de couplage, pour $\mu = m = 1$	139
4.19	Onde P : Comparaison avec les résultats de Ji et Surya pour deux valeurs de la constante de couplage, pour $\mu = m = 1$. En bleu nos résultats «physiques».	140
4.20	Déphasage imaginaire au voisinage du seuil. Ici, $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$ (seuil à $k_0 = 0.75$) pour différentes ondes partielles.	141
4.21	Onde P : Déphasages imaginaires pour les ondes P_0 et P_1 (en noir) ainsi que déphasage «physique» (en rouge) à l'approximation <i>ladder</i> ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). Le déphasage «physique» est toujours négatif et viole donc l'unitarité de la matrice S	142
4.22	Évolution du déphasage imaginaire pour l'onde S en fonction de α pour $k_0 = 1$, avec $\mu = 0.5$ et un seuil de $k_0 = 0.75$. Il suit un comportement en α^3 pour les faibles valeurs de α	143

4.23	Diagrammes d'ordre g^3 contribuant à l'amplitude de diffusion du processus $1 + 2 \longrightarrow 1' + 2' + 3'$. Il reste trois autres graphes, où le méson est émis par la ligne 1. Pour alléger le dessin, les <i>spurions</i> (lignes discontinues) externes n'ont pas été dessinés.	144
4.24	Évolution du déphasage imaginaire (onde S) au voisinage du seuil et comparaison avec $\frac{kV_3}{\varepsilon_k}$ (à un facteur multiplicatif près) pour $\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$. . .	148
4.25	Constante de couplage renormalisée α_R en fonction de α ($m=1$, $\mu = 0.5$). . .	152
4.26	Effet de la self-énergie dans le déphasage imaginaire (onde P) au voisinage du seuil, pour $\mu = 0.5$ et $\alpha = 0.1$. En noir, déphasage pour l'approximation ladder. En rouge, le déphasage avec prise en compte de la self-énergie. . . .	153
4.27	Vérification de la relation (4.42) au voisinage du seuil de création (ici $\mu = 0.5$ et $k_0^s = 0.75$).	153
4.28	Onde S : Comparaison des déphasages avec self-énergie avec les résultats de Ji et al. [39] (figures 1 et 2), pour des constantes de couplage $\beta = 0.1$ (en noir) et 0.32 (en rouge), avec $\mu = m = 1$	154
4.29	Onde S : Effet de la self-énergie sur les déphasages réels (en noir) et imaginaires (en rouge) (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 1$).	155
4.30	Onde S : Effet de la self-énergie sur les déphasages réels dans le cas où un état lié existe (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 2$).	156
4.31	Onde S : Effet de la self-énergie sur les déphasages imaginaires dans le cas où un état lié existe (ici $\mu = 0.5$ et $\alpha = 2$).	156
4.32	Onde S : Comparaison des déphasages réels calculés par Phillips et Afnan (en bleu) avec ceux obtenus dans le cadre de la LFD, avec ou sans prise en compte de la self-énergie (en rouge et noir respectivement).	157
4.33	Onde S : Comparaison des déphasages inélastiques calculés par Phillips et Afnan (en bleu) avec ceux obtenus dans le cadre de la LFD, avec ou sans prise en compte de la self-énergie (en rouge et noir respectivement).	158
4.34	Onde S : Mêmes courbes que précédemment, en échelle linéaire.	159
4.35	Onde P : Comparaison entre les déphasages réels à l'approximation <i>ladder</i> (en noir) et avec prise en compte de la self-énergie (en rouge), pour les ondes P_0 et P_1 , ainsi que le déphasage «physique» ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). . . .	159
4.36	Onde P : Déphasages imaginaires avec prise en compte de la self-énergie pour les ondes P_0 et P_1 (en bleu) ainsi que le déphasage «physique» (en rouge) ($\alpha = 1$ et $\mu = 0.5$). En encadré, le déphasage imaginaire correspondant à l'onde S pour ces mêmes paramètres.	160
4.37	Onde P : Comparaison avec les résultats de Ji et al. avec (en rouge) ou sans self-énergie (en noir).	161
5.1	Représentation graphique de l'équation déterminant la fonction d'onde à deux particules.	164
5.2	Noyau de l'interaction dans la <i>ladder approximation</i>	165
5.3	Représentation diagrammatique de la fonction d'onde à deux corps dans la LFD.	167
5.4	Couplage scalaire : Contribution des ondes partielles à chaque composante relativiste de spin g_1 et g_2 , pour $B = 0.1$, $\mu = 0.5$, $\alpha = 3.696$	177

5.5	Couplage scalaire : Module des composantes relativistes g_1 et g_2 , pour $B = 0.1, \mu = 0.5, \alpha = 3.696$	178
5.6	Couplage scalaire : Évolution de l'énergie de liaison en fonction de la constante de couplage pour $\mu = 0.5$	179
5.7	Couplage pseudo-scalaire : Contribution des ondes partielles à chaque composante relativiste de spin g_1 et g_2 . À gauche, les trois premières composantes de la décomposition angulaire de g_1 , à droite, <i>idem.</i> pour g_2 . ($B = 0.1, \mu = 0.15, \alpha = 726.5$).	181
5.8	Couplage pseudo-scalaire : Comparaison des composantes relativistes g_1 et g_2 pour une onde partielle donnée. À gauche, la première composante du développement angulaire, à droite la deuxième composante ($B = 0.1, \mu = 0.15, \alpha = 726.5$).	182
5.9	Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil ($\alpha = 1, \mu = 0.5, m = 1$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2$)).	187
5.10	Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil pour trois valeurs de la constante de couplage $\alpha = 1$ (en noir), $\alpha = 1.2$ (en rouge) et $\alpha = 1.4$ (en bleu). ($\mu = 0.5, m = 1$, avec un facteur de forme ($\Lambda = 2$)).	188
5.11	Couplage scalaire : Déphasages élastiques δ_+ et δ_- avant le seuil avec un facteur de forme dipolaire, avec deux paramétrisations différentes : $\Lambda = 2$ et $\Lambda = 1.3$ ($\alpha = 1, \mu = 0.5, m = 1$).	189
5.12	Couplage scalaire : Comparaison des déphasages élastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky. ($\alpha = 1, \mu = 0.5, m = 1$).	190
5.13	Couplage scalaire : Comparaison des déphasages élastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky pour des systèmes ayant le même spectre (ici, $B = 0.01, \mu = 0.5$).	191
5.14	Couplage scalaire : Comparaison des déphasages inélastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky. ($\alpha = 1, \mu = 0.5, m = 1$).	192
5.15	Couplage scalaire : Comparaison des déphasages inélastiques δ_+ et δ_- avec les déphasages calculés dans le modèle de Wick-Cutkosky, pour des systèmes possédant le même spectre. ($B = 0.01, \mu = 0.5, m = 1$).	192

Bibliographie

- [1] L.C. Alexa et al. Measurement of the deuteron elastic structure function $a(q^2)$ for $0.7 \leq q^2 \leq 6.0(\text{gev}/c)^2$ at jefferson laboratory. *Phys.Rev.Lett*, 82 :1374, 1999.
- [2] D. Abbott et al. Precise measurement of the deuteron elastic structure function $a(q^2)$. *Phys.Rev.Lett*, 82 :1379, 1999.
- [3] D. Abbott et al. Measurement of the tensor polarization in elastic electron-deuteron scattering at large momentum transfert. *Phys.Rev.Lett*, 84 :5053, 2000.
- [4] D. Abbott et al. Phenomenology of the deuteron electromagnetic form factors. *Eur.Phys.J.A*, 7 :421, 2000.
- [5] E.E Salpeter and H.A. Bethe. A relativistic equation for bound-state problems. *Phys.Rev.*, 84(6), 1951.
- [6] P.A.M. Dirac. Forms of relativistic dynamics. *Rev.Mod.Phys.*, 21(3) :392–399, 1949.
- [7] H. Leutwyler and J. Stern. Relativistic dynamics on a null plane. *Ann.Phys.*, 112 :94–164, 1978.
- [8] S.J Brodsky, H.C. Pauli, and S.S. Pinsky. Quantum chromodynamics and other field theory on the light cone. *Phys.Rep.*, 299, 1998.
- [9] B.D Keister and W.N. Polyzou. Relativistic hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics. *Adv.Nucl.Phys.*, 20, 1991.
- [10] S. Weinberg. Dynamics at infinite momentum. *Phys.Rev.*, 150(4) :1313–1318, 1966.
- [11] V.A. Karmanov. *Sov.J.Part.Nucl.*, 19 :228, 1988.
- [12] J. Carbonell, B. Desplanques, V.A. Karmanov, and J.-F. Mathiot. Explicitly covariant light-front dynamics and relativistic few-body systems. *Phys.Reports.*, 300(5,6) :215–347, 1998.
- [13] M. Mangin-Brinet. *Description relativiste des systèmes composites simples par la dynamique du front de lumière*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, 2001.
- [14] R. Jackiw. *Theoretical and Mathematical Physics*. World Scientific., 1995.
- [15] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Inc., 1980.
- [16] V.A. Karmanov. Angular condition imposed on the state vector of a compound system for a light front. *Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz.*, 35(5) :220–223, 1982.
- [17] S. Tomonaga. On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields. *Prog.Theor.Phys.*, 1, 1946.
- [18] J. Schwinger. Quantum electrodynamics. a covariant formulation. *Phys.Rev.*, 74 :1439, 1948.

- [19] V.G. Kadyshevskii. Relativistic equation for the s matrix in the p representation. *Sov. Phys. JETP*, 19(2), 1964.
- [20] M. Mangin-Brinet, J. Carbonell, and V.A. Karmanov. Weak binding limit and non zero angular momentum states in light-front dynamics. *Nucl.Phys.B*, 90 :123–126, 2000.
- [21] V. A. Karmanov, J. Carbonell, and M. Mangin-Brinet. Relativistic wave functions and energies for nonzero angular momentum states in light-front dynamics. *Nucl.Phys.A*, 684 :366–368, 2001.
- [22] R.J. Perry, A. Harindranath, and K.G. Wilson. Light-front tamm-dancoff field theory. *Phys.Rev.Lett.*, 65 :2959–2962, 1990.
- [23] S. Glazek, A. Harindranath, S. Pinsky, J. Shigemitsu, and K. Wilson. Relativistic bound-state problem in the light-front yukawa model. *Phys.Rev.D*, 47 :1599–1619, 1993.
- [24] W. Glöckle. *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*. Springer-Verlag, 1983.
- [25] J.R. Taylor. *Scattering Theory : The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [26] R. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer-Verlag, 2nd. edition, 1982.
- [27] C.J. Joachain. *Quantum Collision Theory*. North-Holland Publishing Company, 1975.
- [28] Levinson. *Mat.Fys.Medd.*, 25(9), 1949.
- [29] R.Machleidt. The meson theory of nuclear forces and nuclear structure. *Adv.Nucl.Phys.*, 19, 1989.
- [30] G. C. Wick. Properties of bethe-salpeter wave functions. *Phys. Rev.*, 96 :1124–1134, 1954.
- [31] R. E. Cutkosky. Solutions of a bethe-salpeter equation. *Phys. Rev.*, 96 :1135–1141, 1954.
- [32] M.G. Fuda. Light front dynamics of few body systems. *Nucl.Phys.A*, 543 :111c–126c, 1992.
- [33] D. Bernard, Th. Cousin, V.A. Karmanov, and J.-F. Mathiot. Nonperturbative renormalization in a scalar model within light-front dynamics. *Phys. Rev. D*, 65 :025016, 2001.
- [34] C.R. Ji. The self-energy corrections to the light-cone two-body equation in ϕ^3 -theories. *Phys.Lett.B*, 322(4) :389–396, 1994.
- [35] M.J. Levine, J. Wright, and J.A. Tjon. Solution of the bethe-salpeter equation in the inelastic region. *Phys.Rev.*, 154(5) :1433, 1967.
- [36] D.R. Phillips and I.R. Afnan. Solving the four-dimensional $nn - \pi nn$ equations for scalars below the meson-production threshold. *Phys.Rev.C*, 54(4) :1542–1560, 1996.
- [37] M.G. Fuda. Angular momentum and light-front scattering theory. *Phys.Rev.D*, 44(6) :1880–1890, 1992.
- [38] C.R. Ji and Y. Surya. Calculation of scattering with the light-cone equation in ϕ^3 theories. *Phys.Rev.D*, 46(8) :3565–3575, 1992.

- [39] C.R. Ji, G.H. Kim, and D.P.Min. Self-energy effect on the rotation symmetry in the light-cone-quantized scalar field scattering. *Phys.Rev.D*, 51(2) :879–889, 1995.
- [40] Y. Yamaguchi. Two-nucleon problem when the potential is nonlocal but separable. *Phys.Rev.*, 95(6) :1628, 1954.
- [41] J. Carbonell and V. A. Karmanov. Relativistic deuteron wave function in the light-front dynamics. *Nucl.Phys.A*, 581 :625–653, 1994.
- [42] M. Mangin-Brinet, J. Carbonell, and V. A. Karmanov. Two-fermion relativistic bound states in light-front dynamics. *Phys.Rev.C*, 68 :055203, 2003.
- [43] J. Carbonell and V. A. Karmanov. Relativistic wave function of the np system in the $j^\pi = 0^+$ continuous spectrum state. *Nucl.Phys.A*, 589 :713–723, 1995.
- [44] M. Mangin-Brinet, J. Carbonell, and V. A. Karmanov. Stability of bound states in the light-front yukawa model. *Phys. Rev. D*, 64 :027701, 2001.
- [45] M. Mangin-Brinet, J. Carbonell, and V. A. Karmanov. Stability of two-fermion bound states in the explicitly covariant light-front dynamics. *Nucl.Phys.Proc.Suppl*, 108 :259–263, 2002.
- [46] V.A. Karmanov, J.-F. Mathiot, and A.V. Smirnov. Renormalized nonperturbative fermion model in covariant light-front dynamics. *Phys. Rev. D*, 69 :045009, 2004.
- [47] J.-J Dugne, V.A. Karmanov, and J.-F. Mathiot. The charge and mass perturbative renormalization in explicitly covariant lfd. *Eur. Phys. J. C*, 22 :105–114, 2001.
- [48] V.A. Karmanov. Relativistic scattering in lfd. *Communication privée.*, 2003.
- [49] C.de Boor and B. Swartz. *SIAM J.Anal*, 22 :582, 1971.
- [50] E.P. Wigner. Relativistic invariance in quantum mechanics. *Il Nuovo Cimento*, III(3) :517–532, 1956.
- [51] E.P. Wigner. On unitary representation of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of Mathematics*, 40(1) :149–204, 1939.
- [52] J. Schwinger. Non-abelian gauge field relativistic invariance. *Phys.Rev.*, 127(1) :324–330, 1962.
- [53] <http://www.focm.net/at/spline/bib/>.
- [54] Ch. Elster, J. Thomas, and W. Glöckle. Two-body t-matrices without angular-momentum decomposition : Energy. *Phys.Rev.C*, 54(4) :1542–1560, 1996.
- [55] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, and V.K. Khersonskii. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific Publishing, 1988.
- [56] E. Noether. *Göttingen Nachr.*, 235 :37, 1918.
- [57] N.C.J. Schoonderwoerd, B.L. Bakker, and V.A. Karmanov. Entanglement of fock-space expansion and covariance in light-front hamiltonian dynamics. *Phys.Rev.C*, 58(6), 1998.

